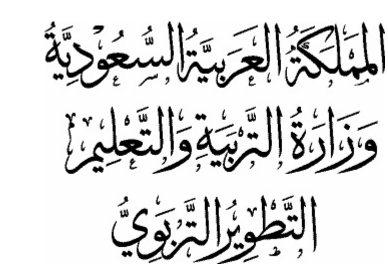
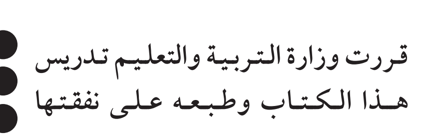




وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION



الرِّياضيَّات

للصف الثالث الثانوي

الفصل الدراسي الأول

قسم العلوم الطبيعية

(بنين)

تأليف :

د. سلمان عبدالرحمن السلمان
د. محمد عبدالرحمن القويز
د. عبدالله محمد الراشد
د. فوزي أحمد الذكير
د. صالح السنوسي
أ. محمد أمين شاكر
د. محمد عبدالرحمن القاضي
أ. فاروق عبدالرزاق الحدبان

طبعة ١٤٢٧هـ ـ ١٤٢٨هـ
٢٠٠٦م ـ ٢٠٠٧م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
السعودية، وزارة التربية والتعليم
الرياضيات : للصف الثالث الثانوي : قسم العلوم الطبيعية – الفصل الدراسي الثاني – ط ٥ – الرياض.
٣٢٤ ص ؛ ٢١x٢٣ سم
ردمك : ٨ – ٢٢٨ – ١٩ – ٩٩٦٠ (مجموعة)
٦ – ٢٢٩ – ١٩ – ٩٩٦٠ (جـ١)
١ ـ الرياضيات ـ كتب دراسية
٢ ـ السعودية – التعليم الثانوي ـ كتب دراسية. أ ـ العنوان
ديوي ٥١٠،٧١٢ ١٩ / ٢١٨٤

أشرف على الإعداد والإنتاج



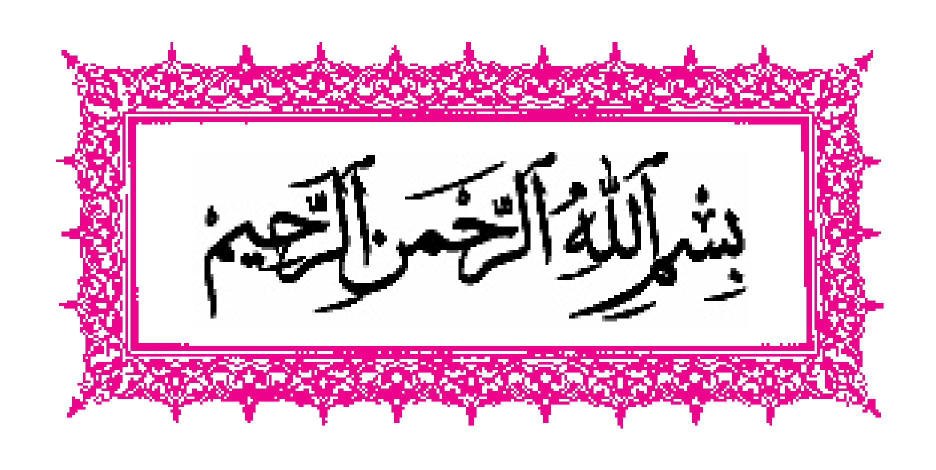
لهذا الكتاب قيمة مهمّة وفائدة كبيرة فلنحافظ عليه
ولنجعل نظافته تشهد على حسن سلوكنا معه...

إذا لم نحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتنا الخاصة في آخر
العام للاستفادة فلنجعل مكتبة مدرستنا تحتفظ به...

موقع الوزارة
www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج
www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج
curriculum@moe.gov.sa


بسم الله الرحمن الرحيم

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

مقدمــــة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيدنا محمد سيد الأولين والآخرين، بعثه الله معلماً وهادياً وبشيراً وداعياً إلى الله بإذنه وسراجاً منيراً، وعلى آله وصحبه، ومن تبعه بإحسان إلى يوم الدين.

أما بعد. فإننا نقدّم إلى أبنائنا طلبة الصف الثالث الثانوي ـ قسم العلوم الطبيعية الجزء الأول من كتاب الرياضيات وفق المنهج الذي اعتمدته وزارة التربية والتعليم، والذي تمت مناقشته في ندوة ضمَّت ممثلين لأقسام الرياضيات في كتاب العلوم والتربية بالجامعات السعودية، وعدداً من الباحثين التربويين والمربين والموجهين والميدانيين من مناطق تعليمية مختلفة من المملكة وذلك خلال المدة ٩ ـ ١٠ من جمادى الآخرة ١٤٠٦هـ.

وقد جاء الكتاب استمراراً لمسابقيه في الصفين الأول الثانوي، والثاني الثانوي ـ قسم العلوم الطبيعية. وقد راعينا عند تأليف الكتاب السهولة والإقلال من التجريد، ما أمكن، وربط محتواه بحياة الطالب وبالمفاهيم التي تقدَّم له في الفيزياء، وبما يصادفه في هذا العصر المتطوّر من معطيات تقنية متقدمة، وبتاريخنا العلمي الحافل، خلال عصورنا الذهبية، عندما سرنا على هدي الإسلام العظيم.

يضم هذا الجزء أربعة أبواب هي :

الباب الأول: القطوع المخروطية.

الباب الثاني : المتتابعات والمتسلسلات.

الباب الثالث : النهايات والاتصال .

الباب الرابع : حساب التفاضل.

وقد تم عرض المفاهيم الواردة في هذه الأبواب بشكل يساعد الطالب على محاولة التعلّم الذاتي، لذا فقد بُنيت المفاهيم على معلومات الطالب السابقة، وتم إيضاح كل مفهوم من خلال أمثلة متنوعة، نأمل أن تساعد طلابنا على استيعاب هذه المفاهيم، ونصيحتنا إلى أبنائنا الطلبة الاعتماد ـ بعد توفيق الله عز وجل ـ على الكتاب في دراستهم ومذاكرتهم، والابتعاد عن الملخَّصات التي يجهّزها لهم آخرون، لأن ذلك يؤدي بهم إلى المحدودية في التفكير؛ فإذا فوجئ الطالب بتمرين أو مسألة ينطبقان على تلك الملخَصات، تراه يقف أمامهما مشدوهاً لا يلوي على شيء. وكما كان الأمر في كتب الصفين السابقين، فإن هذه الطبعة من الكتاب طبعة تجريبية، لذا نرجوا أن تصلنا من إخواننا المدرسين والموجهين ملحوظاتهم مفصلة حول محتويات الكتاب، من خلال التطبيق الميداني، وذلك عن طريق الإدارة العامة للمناهج بوزارة التربية والتعليم، شاكرين لهم تعاونهم البناء.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين، وصل الله على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه ومن تبعه بإحسان إلى يوم الدين.

الأول من شهر صفر ١٤١٥هـ

المؤلفون

الفهـــــرس

الباب الأول : القطـوع المخـروطيـة :

الباب الثـانـي : المتتابعات والمتسلسلات :

الباب الثـانـي : النهـايـات والاتصـــال :

الباب الـرابـع : حسـاب التفـاضـل :

الباب الأول

القطوع المخروطية

١ - ١ مقدمــة :

تُعرَّف الـدائرة، كما تعلم، بأنها مسار نقطـة تتحرك في المستوي بحيث تبقى على مسـافة ثـابتة من نقطة ثابتة في ذلك المستوي. تسمى النقطة الثابتة مـركز الدائرة والمسافة الثابتة نصف قطرها.

وقد سبق أن توصّلنا إلى أن معادلة الدائرة التي مركزها ($س_١$، $ص_١$) ونصف قطرها $ى$ هي:

$$(س - س_١)^٢ + (ص - ص_١)^٢ = ى^٢ \qquad (١ - ١)$$

وهي حالة خـاصة من معادلة الدرجـة الثانية في المتغيرين س، ص التي يمكن أن تكتب على الصورة:

$$ا س^٢ + ب ص^٢ + حـ س + ء ص + هـ = ٠ \qquad (١-٢)$$

ويكون فيها $ا = ب = ١$، $حـ = -٢س_١$، $ء = -٢ ص_١$، $هـ = س_١^٢ + ص_١^٢ - ى^٢$

في هذا الباب سنتعرّف على منحنيات أخرى تُمَثِّلها المعادلة (١-٢).

١ - ٢ القطـع المكـافـئ :

تعريف (١ - ١)

في مستوٍ (ـے)، إذا كان ل مستقيماً ثابتـاً، وكانت ب نقطة ثـابتة (ب ∉ ل) فإننا نـدعو مجموعة نقط هذا المستوي التي يتساوى بعدا كلٍّ منها عن ل، ب قطعاً مكافئاً.

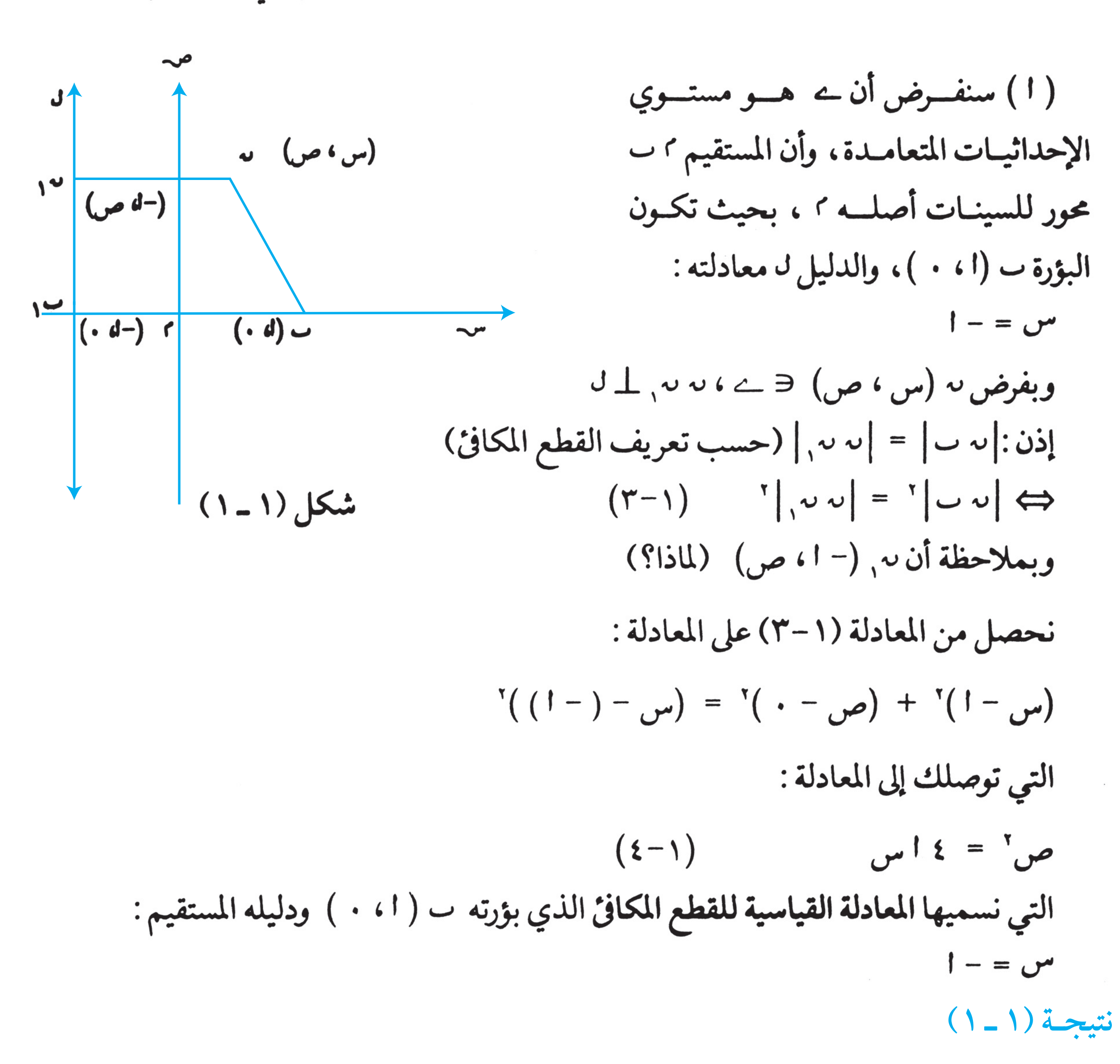
فإذا كانت $ى$ نقطة من هذا القطع (الشكل ١-١)، وكانت $ى_١$ موقع العمود النازل منها على ل، ورمزنا للقطع بالرمز كـ فإنَّ:

$$ى \in كـ \iff |ى ب| = |ى ى_١|$$

تسمّى النقطة الثابتة ب **بؤرة القطع المكافئ**، والمستقيم الثابت ل **دليل القطع المكافئ**.

من الواضح لديك أنَّ النقطة م الواقعة في منتصف المسافة بين النقطة ب والمستقيم ل هي نقطة من القطع المكافئ **(لماذا؟)**.

نرمز للمسافة |ب م| بالرمز ا $\in$ $ح^{+}$ ، فتكون المسافة بين البؤرة والدليل هي |ب $ب_{١}$| = ٢ ا



شكل (١ ـ ١)

(ا) سنفرض أن ى هو مستوي الإحداثيات المتعامدة، وأن المستقيم م ب محور للسينات أصله م ، بحيث تكون البؤرة ب (ا، ٠)، والدليل ل معادلته :

س = - ا

وبفرض ن (س ، ص) $\in$ ى ، ن $ن_{١}$ $\perp$ ل

إذن : |ن ب| = |ن $ن_{١}$| (حسب تعريف القطع المكافئ)

$\Leftrightarrow$ $|ن ب|^{٢}$ = $|ن ن_{١}|^{٢}$ (١-٣)

وبملاحظة أن $ن_{١}$ (- ا، ص) (لماذا؟)

نحصل من المعادلة (١-٣) على المعادلة :

$$(س - ا)^{٢} + (ص - ٠)^{٢} = (س - (- ا))^{٢}$$

التي توصلك إلى المعادلة :

$$ص^{٢} = ٤ ا س \qquad (١-٤)$$

التي نسميها **المعادلة القياسية للقطع المكافئ** الذي بؤرته ب (ا، ٠) ودليله المستقيم :

س = - ا

نتيجة (١ ـ ١)

من المعادلة (١-٤) يمكنك استنتاج ما يأتي :

(١) لما كانت $ص^{٢} \geq ٠$ و ا $\in$ $ح^{+}$، فإنَّ س $\geq$ ٠ ، أي أن القطع المكافئ الذي معادلته :

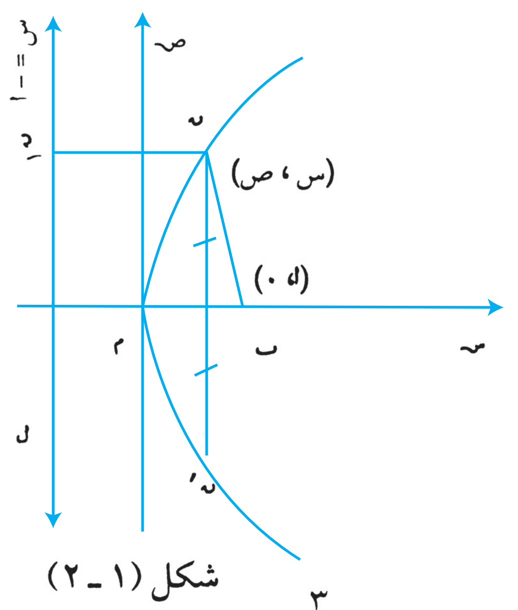
$ص^{٢}$ = ٤ ا س يقع بكامله في الربعين الأول والرابع من مستوي المحورين الإحداثيين .

(٢) $ص = \pm \sqrt{٢ا س}$ وهذا يعني أنَّ لكل قيمـة من قيم س توجد قيمتان متنـاظرتان للمتغير ص هما، $\sqrt{٢ا س}$، $-\sqrt{٢ا س}$؛ أي أن النقطتين ن (س، $\sqrt{٢ا س}$)، نَ (س، $-\sqrt{٢ا س}$)، المتناظرتين بالنسبة لمحور السينـات تقعان على القطع المكافئ، ولعلَّك تلاحظ أنّ أولاهما ترسم الفرع م ن الموجود في الربع الأول، ونظيرتها تـرسم الفرع م نَ الموجود في الربع الـرابع، وهذا يعني أن المستقيم م ب (الذي هو في هـذه الحالة محور السينات) **هو محور تناظر للقطع المكافئ** - انظـر الشكل (١-٢) - ولعلّك تـلاحظ أيضـاً أن م نظيرة نفسهـا، ونسمّيهـا **رأس القطع المكافئ**.

(٣) $|ص| = \sqrt{٢ا س}$ تتـزايد بتـزايد قيمـة س، لذا فـإن فرعي القطع المكـافئ يتباعـدان كلما زادت قيمـة س، وبـالتـالي يكـون القطع المكافئ مفتـوحـاً إلى اليمين (أي مفتـوحـاً في الاتجاه الموجب لمحور السينات).

(٤) إن محور ص يمسّ هذا القطع المكافئ في نقطة الأصل.

(٥) الشكل (١-٢) يمثـل الـرسم البيـاني للمعادلة (١-٤)



شكل (١ـ٢)

مثال (١-١)

عيّن البـؤرة والـدليل للقطع المكـافئ الـذي معادلته: $ص^٢ = ٦ س$، ثم ارسمه.

الحـل:

بموازنة المعادلة المعطاة بالمعادلة (١-٤)

نجد أنّ: $٤ا = ٦ \Leftarrow ا = \frac{٣}{٢}$

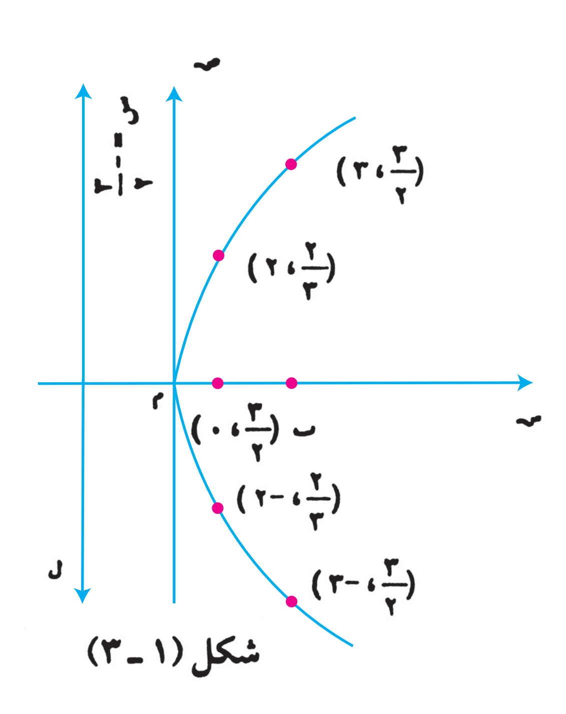
إذن: البؤرة هي $(\frac{٣}{٢}، ٠)$ ومعادلة الدليل هي: $س = -\frac{٣}{٢}$

ولما كان $ص^٢ = ٦ س \Leftrightarrow ص = \pm \sqrt{٦ س}$ (١)

فبإمكاننا تعيين عدد من النقاط التي تساعدنا على رسم هذا القطع وذلك بالتعويض في المعادلة (١) إذ نجد مثلاً :

س	٠	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{٣}{٢}$
ص	٠	± ٢	± ٣

فنحصل على الشكل (١-٣)

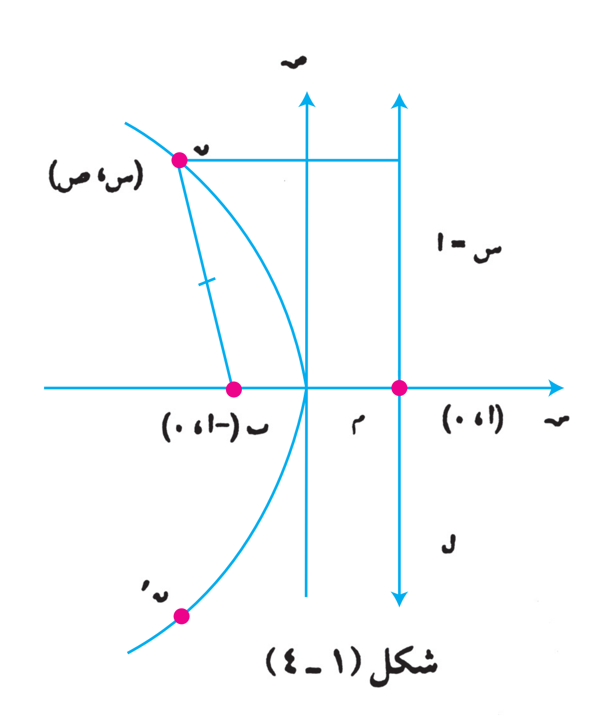


شكل (١ ـ ٣)

الصور الأخرى للمعادلة القياسية للقطع المكافئ :

(ب) لو اعتبرت البؤرة ب (- ا ، ٠) كما في الشكل (١-٤) لكانت معادلة الدليل : س = ا وبالطريقة نفسها التي توصلنا بها إلى المعادلة (١-٤) سنتوصل إلى المعادلة القياسية :

$$ص^٢ = - ٤ ا س \qquad (١-٥).$$



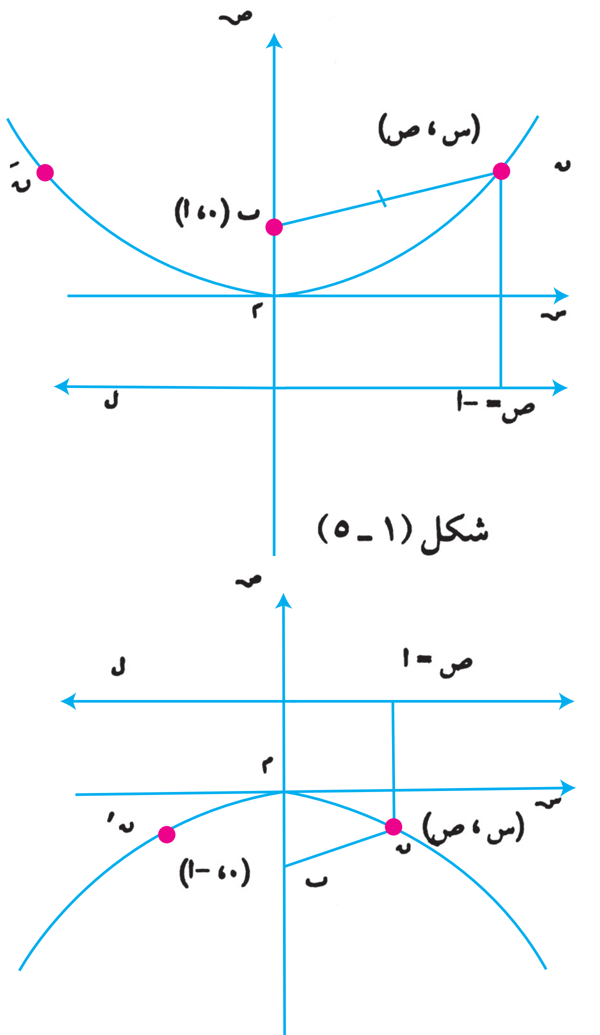
شكل (١ ـ ٤)

تدريب (١-١)

(١) ارجع إلى النتيجة (١-١) وحاول كتابة الفقرات من (١) إلى (٥)، في ضوء المعادلة (١-٥).

(٢) عيّن البؤرة والدليل للقطع المكافئ $ص^٢ = - ٤$ س، ثم ارسمه.

(ج) إذا وجّهنا المستوي ى بحيث يكون م ب محوراً للصادات أصله م، كما في الشكل (١-٥)، بحيث تكون البؤرة ب (٠ ، ا) والدليل ل : ص = - ا فسوف تتوصّل إلى المعادلة القياسية : س^{٢} = ٤ ا ص (١-٦) .



شكل (١ ـ ٥)

شكل (١ ـ ٦)

تدريب (١-٢)

حاول كتابة الفقرات من (١) إلى (٥) من النتيجة (١-١) في ضوء المعادلة (١-٦) .

في الشكل (١-٥) لو اعتبرت البؤرة ب (٠ ، - ا) لوجدت أنّ الدليل : ص = ا وحصلت على المعادلة القياسية للقطع المكافئ :

س^{٢} = - ٤ا ص (١-٧) والتي يمثّلها الشكل (١-٦) .

تدريب (١-٣)

(١) أعد المطلوب في التدريب (١-٢) في ضوء المعادلة (١-٧) .

(٢) عيّن البؤرة والدليل للقطع المكافئ الذي معادلته س^{٢} = ٤ ص ثم ارسمه .

ملحوظة (١ ـ ١)

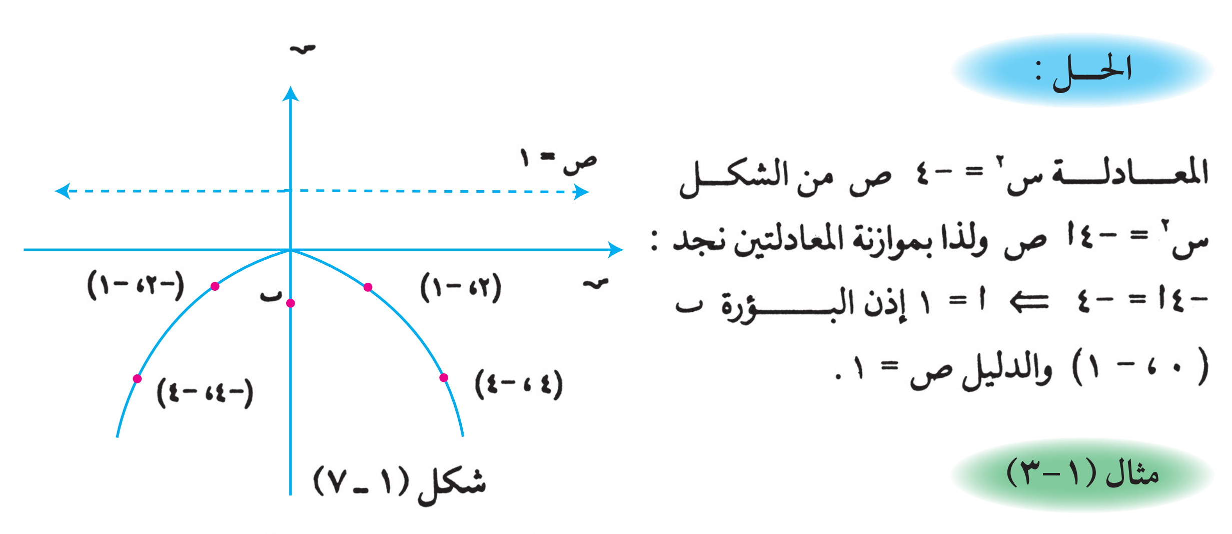
نلاحظ من الأشكال السابقة أن فتحة القطع تتّجه دوماً من الرأس نحو البؤرة .

مثال (١-٢)

عيّن البؤرة والدليل للقطع المكافئ س^{٢} = -٤ ص ثم ارسمه .

الحـــل :

المعـــادلـــة $س^٢ = -٤ ص$ من الشكـــل $س^٢ = -٤ا ص$ ولذا بموازنة المعادلتين نجد : $-٤ا = -٤ \Leftarrow ا = ١$ إذن البـــؤرة ب (٠ ، - ١) والدليل ص = ١ .



شكل (١ ـ ٧)

مثال (١-٣)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرتـه (-١ ، ٠) ورأسه (٠ ، ٠) وكذلك أوجد معادلة دليله وارسم القطع .

الحـــل :

حيث إن بؤرة هذا القطع واقعـة على القسم السالب من محور س ورأسه نقطه الأصل فإن محور س هـو محور القطع المكـافئ، كما أن فتحة القطـع إلى اليسار (أي في الاتجاه السـالب لمحـور س) وتكون معادلته القياسية من الشكل :

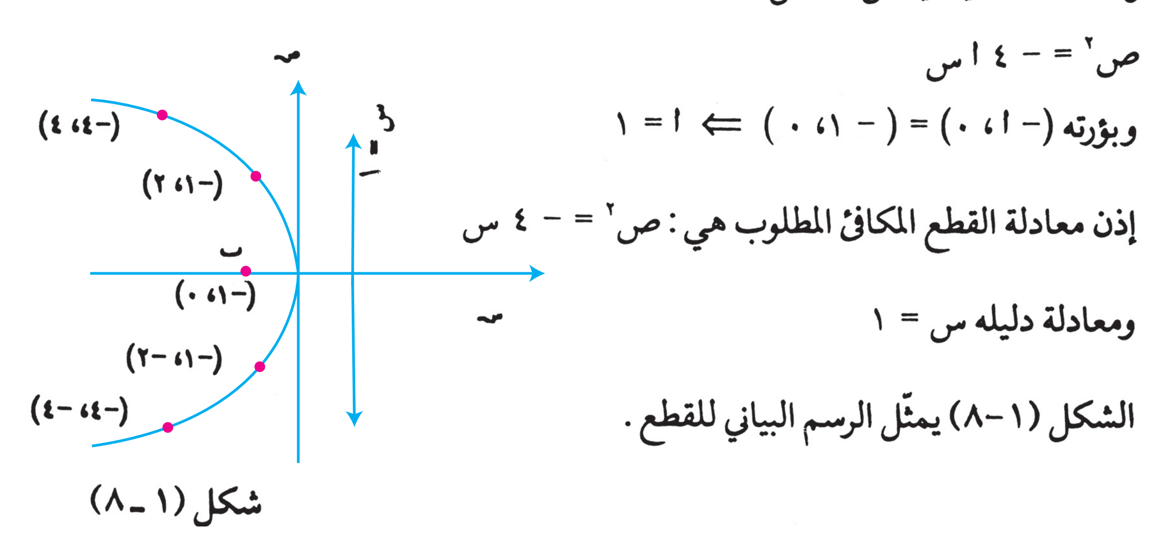
$ص^٢ = -٤ ا س$

وبؤرته $(-ا ، ٠) = (-١ ، ٠) \Leftarrow ا = ١$

إذن معادلة القطع المكافئ المطلوب هي : $ص^٢ = -٤ س$

ومعادلة دليله س = ١

الشكل (١-٨) يمثّل الرسم البياني للقطع .



شكل (١ ـ ٨)

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد المحورين الإحداثيين ورأسه النقطة (ء ، هـ)

(أ) المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي محور سـ ورأسه (ء ، هـ) وفتحته إلى اليمين :

إذا كانت ن (س، ص) نقطة واقعة على القطع المكافئ الذي رأسه (ء ، هـ) وبؤرته ب (ء + ا ، هـ) فإن دليله س = ء − ا كما في الشكل (١−٩).

من التعريف (١−١) نستنتج أنَّ :

$$|ن ب| = |ن ن_{١}| ، ن_{١} = (ء - ا ، ص)$$

$$\sqrt{[س - (ء + ا)]^{٢} + (ص - هـ)^{٢}} = |س - (ء - ا)|$$

$$\sqrt{[(س - ء) - ا]^{٢} + (ص - هـ)^{٢}} = |(س - ء) + ا|$$

شكل (١ ـ ٩)

وبتربيع الطرفين نجد :

$$[(س - ء) - ا]^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = [(س - ء) + ا]^{٢}$$

$$(س - ء)^{٢} - ٢ ا (س - ء) + ا^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = (س - ء)^{٢} + ٢ ا (س - ء) + ا^{٢}$$

وبعد الاختصار نحصل على :

$$(ص - هـ)^{٢} = ٤ ا (س - ء) \qquad (١-٨)$$

وهذه هي الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (ء ، هـ) ومحوره يوازي محور سـ وفتحته إلى اليمين وبؤرته النقطة (ء + ا ، هـ) ومعادلة الدليل هي س = ء − ا ومعادلة محور تناظره هي ص = هـ ، كما في الشكل (١−٩).

وبمعالجة مماثلة لما سبق في (أ) نجد :

(ب) المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي محور س ورأسه (د ، هـ) وفتحته إلى اليسار هي :

(ص − هـ)^{٢} = − ٤ أ (س − د)   (١−٩)

انظر الشكل (١−١٠)

شكل (١ ـ ١٠)

تدريب (١−٤)

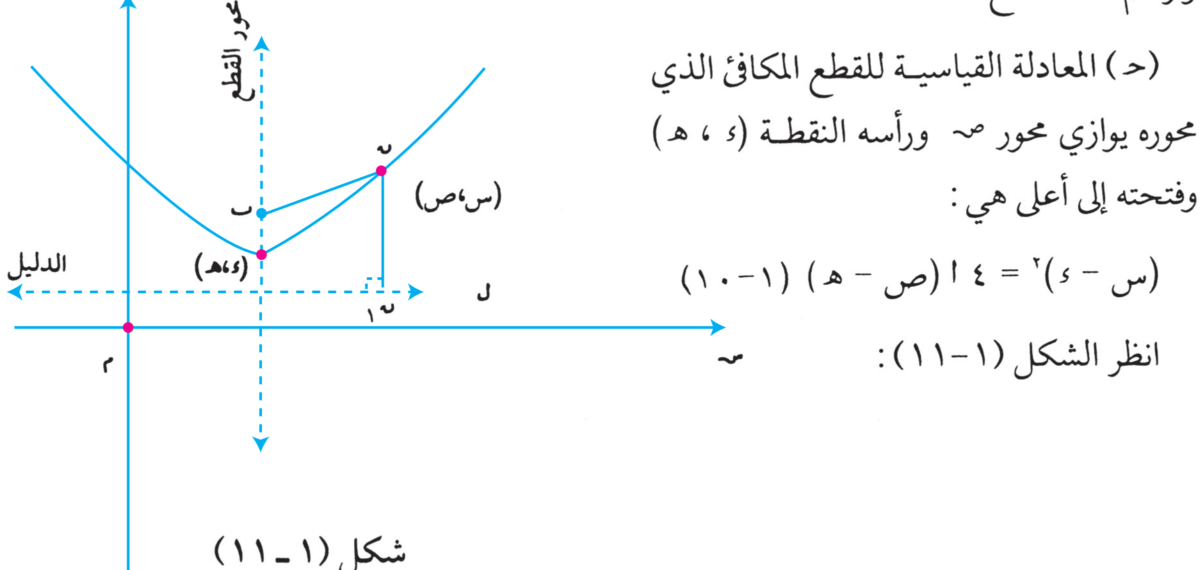
(١) استفد من الشكل (١−١٠) في كتابة كل من البؤرة والدليل ومحور التناظر للقطع المكافئ الذي معادلته (١−٩) .

(٢) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٢ ، ٢) وبؤرته (٣ ، ٢) . ثم عين معادلة الدليل وارسم هذا القطع .

(جـ) المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي محور ص ورأسه النقطة (د ، هـ) وفتحته إلى أعلى هي :

(س − د)^{٢} = ٤ أ (ص − هـ) (١−١٠)

انظر الشكل (١−١١) :



شكل (١ ـ ١١)

(ء) المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي محور ص وراسه النقطة (ء ، هـ) وفتحته إلى أسفل هي :

(س − ء)^{٢} = − ٤أ (ص − هـ) (١−١١)

انظر الشكل (١−١٢)

شكل (١ ـ ١٢)

مثال (١−٤)

عيِّن البؤرة والدليل ومحور التناظر للقطع المكافئ الذي معادلته :

(س − ء)^{٢} = − ٤ أ (ص − هـ)، مستفيداً من الشكل (١−١٢) .

الحـــل :

هذا القطع محور تناظره يوازي محور ص وفتحته إلى أسفل ورأسه النقطة (ء ، هـ) ولذا فإنّ :

البؤرة ب = ($\overline{\text{م ب}'}$ ، $\overline{\text{ب}'\text{ ب}}$) = (ء ، هـ − أ)

الدليل : ص = $\overline{\text{ب}'\text{ن}'}$ = $\overline{\text{ب}'\text{و}}$ + $\overline{\text{و ن}'}$ ⇐ ص = هـ + أ

محور التناظر: س = ء

تدريب (١-٥)

استعن بالشكل (١-١١) في إيجاد البؤرة والدليل ومحور التناظر للقطع المكافئ الذي معادلته (١-١٠).

مثال (١-٥)

أوجد البؤرة والدليل ومحور التناظر للقطع المكافئ الذي معادلته

(ص + ١)^{٢} = −١٢ (س − ٢)

الحل :

بالمقارنة مع المعادلة (١-٩) نجد أنّ محور هذا القطع موازٍ لمحور س وفتحته إلى اليسار، كما أن ا = ٣ ورأسه م$_{١}$ (ء ، هـ) = (٢ ، − ١)

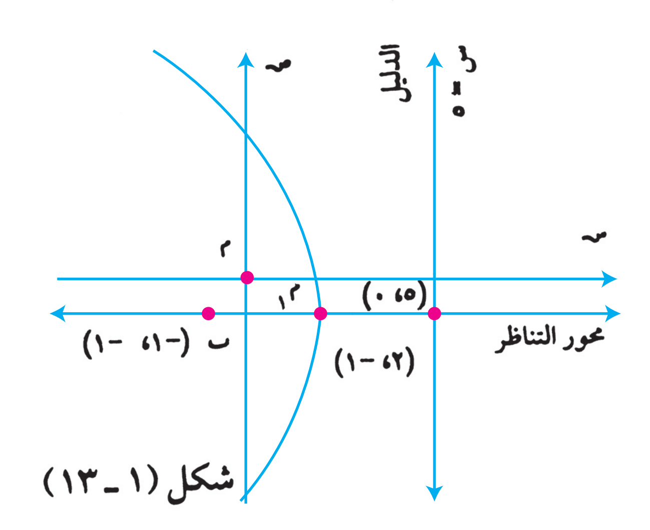
لكن | ب م$_{١}$ | = ا = ٣ ، م$_{١}$ (٢ ، −١) ⟸

البؤرة ب (− ١، − ١)

الدليل : س = ء + ا = ٢ + ٣ = ٥

محور التناظر ص = − ١

(يمكن الاستفادة من الشكل (١-١٣))



شكل (١ ـ ١٣)

نتيجة (١ ـ ٢)

من المعادلات (١-٤) وحتى (١-١١) يمكننا أن نستنتج أن معادلة القطع المكافئ الذي محوره موازٍ لأحد محوري الإحداثيات يمكن كتابة معادلته على إحدى الصورتين الآتيتين :

(١) عندما يكون المحور موازياً لمحور السينات :

س = م ص^{٢} + هـ ص + و ، م ≠ ٠ (١-١٢)

فإذا كان $م > ٠$ ففتحة القطع إلى اليمين (أي في الاتجاه الموجب لمحور س) وإذا كـان $م < ٠$ ففتحة القطع إلى اليسار (أي في الاتجاه السالب لمحور س).

(٢) عندما يكون المحور موازياً لمحور الصادات:

$$ص = م س^٢ + هـ س + و ، \quad م \neq ٠ \qquad (١-١٣)$$

فإذا كان $م > ٠$ ففتحة القطع إلى أعلى (أي في الاتجاه الموجب لمحور ص)
وإذا كان $م < ٠$ ففتحة القطع إلى أسفل (أي في الاتجاه السالب لمحور ص).

ولمعرفة صفات القطع الممثَّل بإحـدى المعادلتين (١-١٢)، (١-١٣) نضع المعادلة في إحدى الصور القياسية التي مرّت معنا.

مثال (١-٦)

أوجد الرأس والبؤرة والدليل للقطع المكافئ الذي معادلته:

$$٤ س^٢ + ٤ س + ١٦ ص = ٤٧$$

الحـــل:

حيث إن المربَّع على المتغير س فإن محور التنـاظـر يـوازي محور ص ، ولـذلك نضع المعـادلـة المعطاة على إحدى الصورتين القياسيتين (١-١٠) أو (١-١١) كما يأتي:

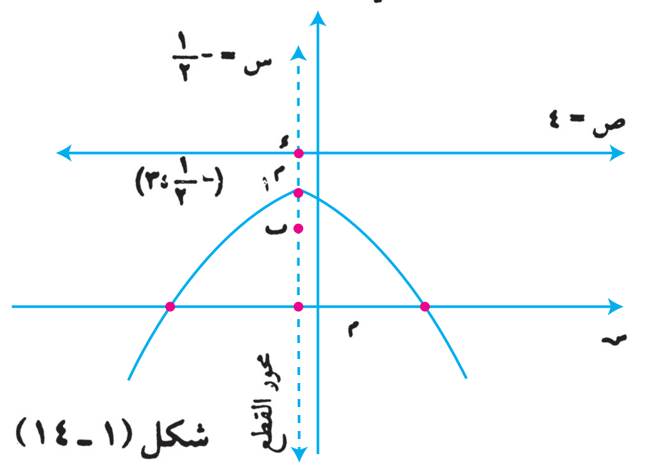
$$٤ س^٢ + ٤ س = - ١٦ ص + ٤٧$$

$$س^٢ + س = - ٤ ص + \frac{٤٧}{٤}$$

وبإكمال المربع على س نجد:

$$(س + \frac{١}{٢})^٢ = - ٤ ص + \frac{٤٧}{٤} + \frac{١}{٤}$$

$$(س + \frac{١}{٢})^٢ = - ٤ ص + ١٢$$



شكل (١ ـ ١٤)

$(س + \frac{1}{2})^2 = -4$ (ص − ٣)

وهذه المعادلة من الشكل $(س - ء)^2 = -4$ ا (ص − هـ)

لذا نستنتج أن : ا = ١ كما أن فتحة القطع إلى أسفل .

رأس القطع (ء ، هـ) = $(-\frac{1}{2}$ ، ٣)

البؤرة ب (ء ، هـ − ا) = $(-\frac{1}{2}$ ، ٢) ، (لاحظ أن $|م_1 ب|$ = ا = ١)

الدليل : ص = هـ + ا = ٤ ، (لاحظ أن $|م_1 ء|$ = ا = ١)

والشكل (١−١٤) يمثّل الرسم البياني لهذا القطع .

تمارين (١ - ١)

في التمارين من (١) إلى (٤) أوجد معادلة القطع المكافئ :

١) الرأس (-٢ ، ٣) ، البؤرة (-٤ ، ٣).

٢) الدليل س = ٥ ، البؤرة (١ ، ١).

٣) الدليل س = -٤ ، البؤرة (٣ ، ٤).

٤) الرأس (٤ ، ٣) والقطع يمر بنقطة الأصل ومحوره يوازي محور س .

في التمارين من (٥) إلى (١٢) استنتج صفات القطع المكافئ وارسمه :

٥) $ص^2 = -٩ س$

٦) $س^2 = ٨ ص$

٧) $س^2 = -١١ ص$

٨) $ص^2 = ٣ س$

٩) $ص = س^2 + ٦ س + ١١$

١٠) $س = ص^2 - ٢ ص + ١$

١١) $(ص - ٥)^2 = -٤ (س - ١)$

١٢) $(س - ٣)^2 = -٦ (ص + ٢)$

١٣) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٢ ، ٤) ودليله المستقيم س = -١ .

١٤) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٣ ، ٣) ودليله المستقيم ص = ٢ .

١٥) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٥ ، ٣) ودليله المستقيم ص = -١ .

١٦) استنتج معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور ص ويمر بالنقاط (٢ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (-١ ، -٢) ومن ثم ارسم القطع وعين عليه البؤرة والرأس والدليل ومحور التناظر.

١ - ٣ القطـع النـاقـص

تعريف (١-٢)

القطع الناقص هو مسـار نقطة في المستـوي بحيث يبقى مجموع بعـديها عن نقطتين ثابتتين في المستوي مقداراً ثابتاً دائماً.

نسمي النقطتين الثابتتين بؤرتي القطع الناقص.

المعادلة القياسية للقطع الناقص :

(ا) لنفرض أن البؤرتين المشـار إليهما في التعريف تقعان على محور سـ عند النقطتين $ب_١$ (حـ، ٠)، $ب_٢$ (− حـ ، ٠)، وأن العدد الثابت هو ٢ ا ، حيث كل من حـ ، ا عدد حقيقي موجب (ا ، حـ $\in ح^+$) من التعريف (١-٢) يتضح أنـه لا بد لأي نقطة ن (س ، ص) على القطع الناقص، كما في الشكل (١-١٥) أن تحقّق المعادلة :

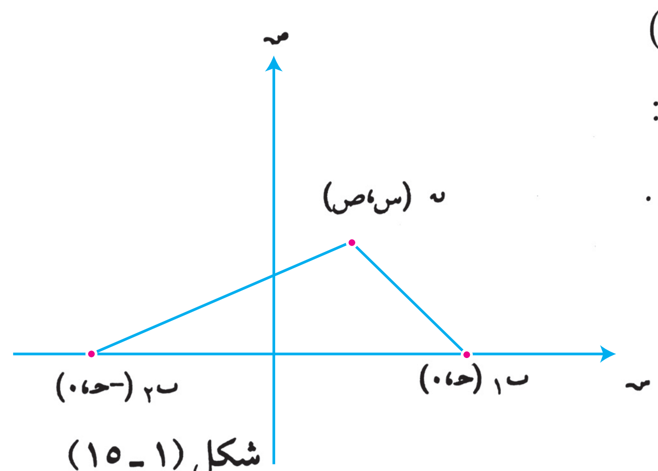
$$|ن ب_١| + |ن ب_٢| = ٢ ا \qquad (١-١٤)$$

كما يتضح من الشكل (١-١٥) أيضاً أنَّ :

$|ب_١ ب_٢| = ٢$ حـ ، **ويُدعى البعد البؤري.**

ومن متباينة المثلث ن $ب_١$ $ب_٢$ نجد

٢ ا > ٢ حـ ومنه ا > حـ



شكل (١ ـ ١٥)

ومن المعادلة (١-١٤) نحصل على :

$$\sqrt{(س - حـ)^٢ + ص^٢} + \sqrt{(س + حـ)^٢ + ص^٢} = ٢ ا$$

$$\sqrt{(س - حـ)^٢ + ص^٢} = ٢ ا - \sqrt{(س + حـ)^٢ + ص^٢}$$

بالتربيع :

$$(س - حـ)^2 + ص^2 = ٤ا^2 - ٤ا\sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} + (س + حـ)^2 + ص^2$$

$$\sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} = ا + \frac{حـ}{ا} س$$ ، لماذا؟

وبالتربيع مرة أخرى :

$$(س + حـ)^2 + ص^2 = ا^2 + ٢ حـ س + \frac{حـ^2}{ا^2} س^2$$

$$س^2 + ٢ حـ س + حـ^2 + ص^2 = ا^2 + ٢ حـ س + \frac{حـ^2}{ا^2} س^2$$

$$ا^2 س^2 + ا^2 حـ^2 + ا^2 ص^2 = ا^4 + حـ^2 س^2$$

$$(ا^2 - حـ^2) س^2 + ا^2 ص^2 = ا^2 (ا^2 - حـ^2)$$

بالقسمة على $ا^2 (ا^2 - حـ^2)$ نحصل على :

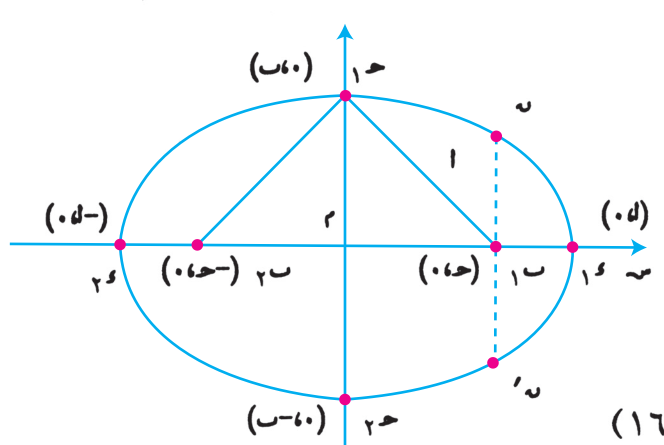
$$\frac{س^2}{ا^2} + \frac{ص^2}{ا^2 - حـ^2} = ١ \qquad (١-١٥)$$

وبوضع $ا^2 - حـ^2 = ب^2$ تأخذ المعادلة (١-١٥) الصورة :

$$\frac{س^2}{ا^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١ \qquad (١-١٦)$$

وهي المعادلة القياسية للقطع الناقص الممثل بالشكل (١-١٦)

نتيجة (١ ـ ٣)



شكل (١ ـ ١٦)

من المعادلة (١-١٦) نستنتج أن:

(١) القطع الناقص متناظر بالنسبة لمحور السينات لأنه لكل قيمة تأخذها س توجد قيمتان متناظرتان للمتغيّر ص هما:

$\pm \frac{ب}{ا} \sqrt{ا^2 - س^2}$ (انظر الشكل ١-١٦)

(٢) وبالمثل فإنَّ القطع الناقص متناظر بالنسبة لمحور الصادات لأن:

$س = \pm \frac{ا}{ب} \sqrt{ب^2 - ص^2}$

(٣) يقطع منحني القطع محور الصادات عندما س = ٠، ص = ± ب ٠ أي أن

$حـ_1$ (٠، ب)، $حـ_2$ (٠، − ب) هما نقطتا تقاطع القطع مع المحور ص.

ومن الشكل (١-١٦) نلاحظ أنَّ $|حـ_1 ب_1| = |حـ_1 ب_2| = ا$

ولكي يكون س عدداً حقيقيًّا يجب أن يكون:

$ب^2 - ص^2 \geq ٠ \Leftarrow ص^2 \leq ب^2 \Leftarrow |ص| \leq ب$. وهذا يعني أن النقطتين

$حـ_1$ (٠، ب)، $حـ_2$ (٠، − ب) هما أعلى وأدنى نقطتين من القطع الناقص على المحور ص.

(٤) وبالمثل: يقطع منحني القطع محور السينات عندما ص = ٠، س = ± ا،

أي أن $ء_1$ (ا، ٠)، $ء_2$ (− ا، ٠) هما نقطتا تقاطع القطع مع المحور س. ويقع القطع بكامله بين المستقيمين س = ± ا.

(٥) للقطع الناقص مركز تناظر هو النقطة م (٠ ، ٠) منتصف كل من [$ء_١ ء_٢$]، [$حـ_١ حـ_٢$] لأن كل نقطة ن (س ، ص) ∈ القطع الناقص، نظيرتها ن′ (− س ، − ص) ∈ القطع الناقص (لماذا؟).

ملحوظة (١ ـ ٢)

في الشكل (١-١٦) :

(١) يسمّى المستقيم $ب_١ ب_٢$ (أي المستقيم المار بالبؤرتين $ب_١$ ، $ب_٢$) المحور الأكبر (أو المحور الكبير أو المحور البؤري) للقطع الناقص، كما يسمى المستقيم $حـ_١ حـ_٢$ المحور الأصغر (أو المحور الصغير أو المحور غير البؤري) للقطع.

(٢) الطول $|ء_١ ء_٢|$ يدعى طول المحور الأكبر (أو طول القطر الكبير) للقطع ويساوي ٢أ. أمّا الطول $|حـ_١ حـ_٢|$ فيسمى طول المحور الأصغر (أو طول القطر الصغير) للقطع ويساوي ٢ب.

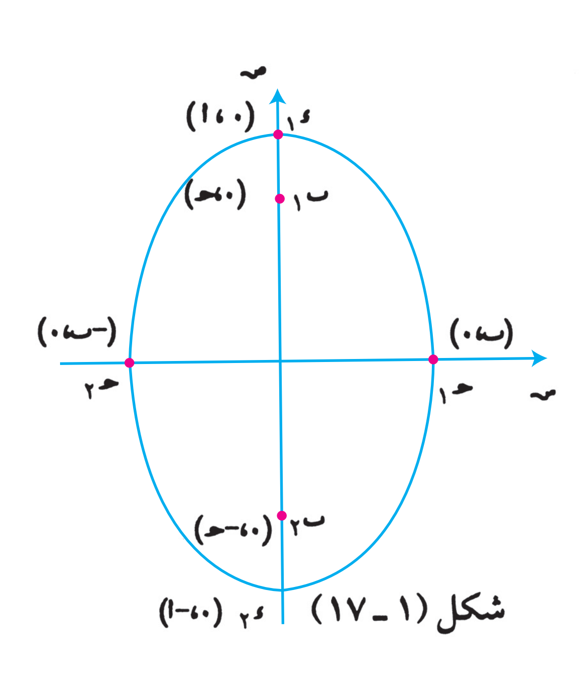
(٣) إذا كانت $ب_١ = ب_٢$ = (٠ ، ٠) فإننا نحصل على الدائرة: $س^٢ + ص^٢ = أ^٢$ ولذلك تعتبر الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص.

ملحوظة (١ ـ ٣)

بإمكاننا الحصول على الشكل (١-١٦) من خلال تطبيق التعريف (١-٢) مباشرة على النحو الآتي «نحضر خيطاً طوله ٢أ ونثبت كل طرف من طرفيه في بؤرة (بواسطة دبوس على سبيل المثال)، ثم نلاحظ أن أي نقطة ن نرسمها بشد الخيط لتكوين المثلث $ب_١$ ن $ب_٢$ كما في الشكل (١-١٥) هي نقطة على القطع».

(ب) عندما تقع البؤرتان على محور ص بدلاً من محور س، كما في الشكل (١-١٧) فإنّ المعادلة (١-١٦) تصبح :

$$\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١ \qquad (١-١٧)$$



شكل (١ ـ ١٧)

تدريب (١-٦)

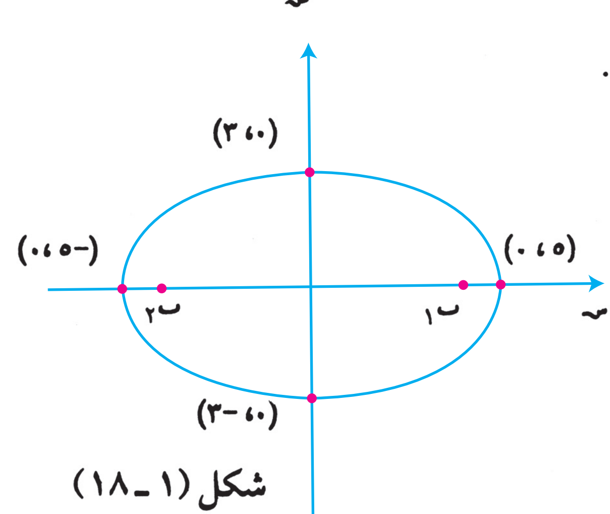
اكتب صفات القطع الناقص الممثل بالمعادلة (١-١٧) في ضوء النتيجة (١-٣) والملحوظة (١-٢) ومستفيداً من الشكل (١-١٧).

مثال (١-٧)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي طولا محوريه ٦ ، ١٠ ومركزه (٠ ، ٠) ثم عيّن بؤرتيه في كل من الحالتين :

(أ) إذا كان محوره الأكبر منطبقاً على محور س .

(ب) إذا كان محوره الأكبر منطبقاً على محور ص .



شكل (١ ـ ١٨)

الحل :

(أ) في هذه الحالة تكون معادلة القطع الناقص بالصورة (١-١٦) :

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

وبما أن ٢أ = ١٠ فإن أ = ٥

وبما أن ٢ب = ٦ فإن ب = ٣

وعليه فإن المعادلة المطلوبة هي :

$$\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$$

وحيث إن $ب^٢ = أ^٢ - حـ^٢$

إذن حـ = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = ٤

وبالتالي فإن البؤرتين :

$ب_١$ (٤ ، ٠) ، $ب_٢$ (− ٤ ، ٠)، انظر الشكل (١−١٨).

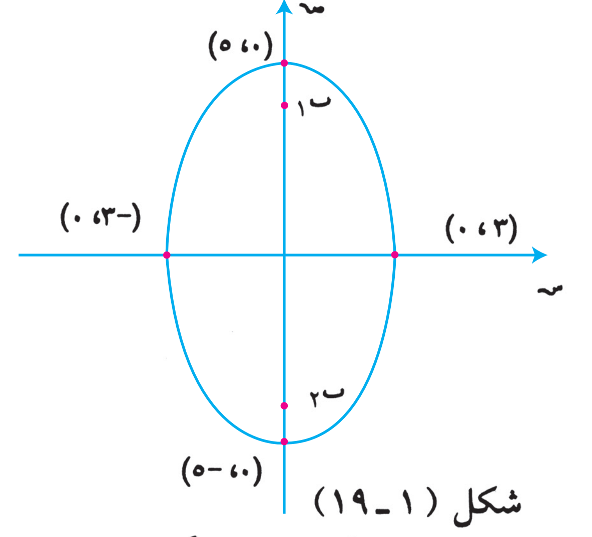
(ب) أمّا في هذه الحالة فتكون معادلة القطع الناقص بالصورة (١−١٧)، وتكون المعادلة المطلوبة هي :

$$\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$$

وتكون البؤرتان :

$ب_١$ (٠ ، ٤) ، $ب_٢$ (٠ ، − ٤)

كما في الشكل (١−١٩).



شكل (١ ـ ١٩)

مثال (١−٨)

أوجد معادلة القطع الناقص إذا كان مركزه (٠ ، ٠) ومحوره الأصغر منطبقاً على محور س وطوله ٦ وحدات، والبعد البؤري ٨ وحدات.

الحـل :

حيث إن ٢ب = ٦ فإن ب = ٣ ،

وحيث إن ٢حـ = ٨ فإن حـ = ٤

ولما كان ا^٢ = ب^٢ + حـ^٢ فإن ا = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥

وحيث إن المحور الأكبر عمودي على المحور الأصغر فإنه ينطبق على محور س وعليه فإن البؤرتين تقعان على المحور س عند:

ب$_١$ (٤ ، ٠) ، ب$_٢$ (−٤ ، ٠).

وتكون معادلة القطع الناقص المطلوبة هي:

$\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ ، انظر الشكل (١−١٨).

مثال (١−٩)

عيِّن البؤرتين وطولي المحورين للقطع الناقص:

٢٥ س^٢ + ٩ ص^٢ = ٢٢٥

الحـــل:

٢٥ س^٢ + ٩ ص^٢ = ٢٢٥ ⟺ $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

وهي من الشكل: $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{ا^٢} = ١$ وبذلك تكون المعادلة المعطاة هي معادلة قطع ناقص مركزه (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر منطبق على محور ص، لذا فإن بؤرتيه تقعان على المحور ص.

وحيث إن ا^٢ = ٢٥ ، ب^٢ = ٩ فإن ا = ٥ ، ب = ٣ ، حـ = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = ٤ ، وبالتالي فإن:

طول المحور الأكبر = ٢ ا = ١٠ وحدات،

طول المحور الأصغر = ٢ ب = ٦ وحدات،

أمّا البؤرتان فهما: ب$_١$ (٠ ، ٤) ، ب$_٢$ (٠ ، − ٤). انظر شكل (١−١٩).

تدريب (١-٧)

(أ) أوجد معادلة القطع الناقص إذا علمت أن محوره الأصغر يقع على محور س وطوله ٨ وحدات وأن البعد بين بؤرتيه ٦ وحدات ومركزه نقطة الأصل .

(ب) عين البؤرتين وطولي المحورين للقطع الناقص ٩ س^٢ + ٢٥ ص^٢ = ٢٢٥ .

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (ء ، هـ) ومحوراه يوازيان محوري الإحداثيات :

(أ) المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه (ء ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور س :

لنفرض أن ب$_١$ (ء + حـ ، هـ) ، ب$_٢$ (ء − حـ ، هـ) هما بؤرتا القطع وأن ن (س ، ص) نقطة تقع على القطع ، كما في الشكل (١-٢٠) .

من التعريف (١-٢) يكون :

$$|ن ب_١| + |ن ب_٢| = ٢ أ$$

$$\sqrt{[س - (ء + حـ)]^٢ + (ص - هـ)^٢} + \sqrt{[س - (ء - حـ)]^٢ + (ص - هـ)^٢} = ٢ أ$$

إذا أجرينا لهذه المعادلة التبسيط الذي أجريناه في الحالة التي يكون فيها محورا القطع منطبقين على المحورين الإحداثيين فسنحصل على :

$$\frac{(س - ء)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{ب^٢} = ١ \quad \ldots\ldots (١-١٨)$$

وهي المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه (ء ، هـ) ومحوره الأكبر (البؤري) يوازي محور س ، كما في الشكل (١-٢٠) .

شكل (١ ـ ٢٠)

نتيجة (١ -٤)

من المعادلة (١-١٨) والشكل (١-٢٠) نستنتج :

(١) يقع المحور الأكبر (المحور البؤري) للقطع الناقص على المستقيم ص = هـ .

(٢) يقع المحور الأصغر للقطع الناقص على المستقيم س = ء .

(٣) بؤرتا القطع الناقص هما :

$ب_1$ (ء + حـ ، هـ) ، $ب_2$ (ء - حـ ، هـ)

وتقعان بالطبع على المحور الأكبر، الذي طوله ٢ ا ويوازي المحور سَ .

(ب) المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه (ء ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور صَ :

بطريقة مماثلة لما عملناه في الفقرة (ا) نجد أن المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه (ء ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور صَ هي :

$$\frac{(ص - هـ)^2}{ا^2} + \frac{(س - ء)^2}{ب^2} = 1 \qquad (1-19)$$

تدريب (١-٨)

أكمل العبارات الآتية مستفيداً من المعادلة (١-١٩) والشكل (١-٢١)

(١) يقع المحور الأكبر للقطع الناقص على المستقيم . . . . = ...

(٢) يقع المحور الأصغر للقطع الناقص على المستقيم . . . . = ...

(٣) بؤرتا القطع الناقص هما :

$ب_1$ (ء ، هـ + . . .) ، $ب_2$ (. . . ، هـ - . . .)

مثال (١-١٠)

أثبت أن معادلة الدرجة الثانية

$$٩ س^{٢} + ٤ ص^{٢} - ٥٤ س + ١٦ ص + ٦١ = ٠$$

تمثل قطعاً ناقصاً، ثم حدد صفاته .

شكل (١ـ٢١)

الحـــل :

نُجَمِّع الحدود بشكل مناسب

$$٩ (س^{٢} - ٦ س) + ٤ (ص^{٢} + ٤ ص) = -٦١$$

نكمل المربَّع على كلٍّ من س ، ص :

$$٩ (س^{٢} - ٦ س + ٩) + ٤ (ص^{٢} + ٤ ص + ٤) = -٦١ + ٨١ + ١٦$$

$$٩ (س - ٣)^{٢} + ٤ (ص + ٢)^{٢} = ٣٦$$

$$\frac{(س - ٣)^{٢}}{٤} + \frac{(ص + ٢)^{٢}}{٩} = ١$$ ، لماذا؟

وهذه معادلة قطع ناقص لكونها من جنس المعادلة (١-١٩)، كما نستنتج منها أن :

$ا = ٣$ ، $ب = ٢$ ، $حـ = \sqrt{٩ - ٤} = \sqrt{٥}$ ، وبالتالي فإن :

مركز القطع الناقص هو النقطة (٣ ، - ٢)

طول المحور الأكبر = ٢ ا = ٦ ، كما أنه يوازي المحور ص .

طول المحور الأصغر = ٢ ب = ٤ .

البعد البؤري = ٢ حـ = $٢ \sqrt{٥} \cong ٤,٤٧$.

البؤرتان هما :

ب١ (٣ ، - ٢ + $\sqrt{٥}$) ≅ (٣ ، ٢ , ٠)

ب٢ (٣ ، - ٢ - $\sqrt{٥}$) ≅ (٣ ، - ٢ , ٤)

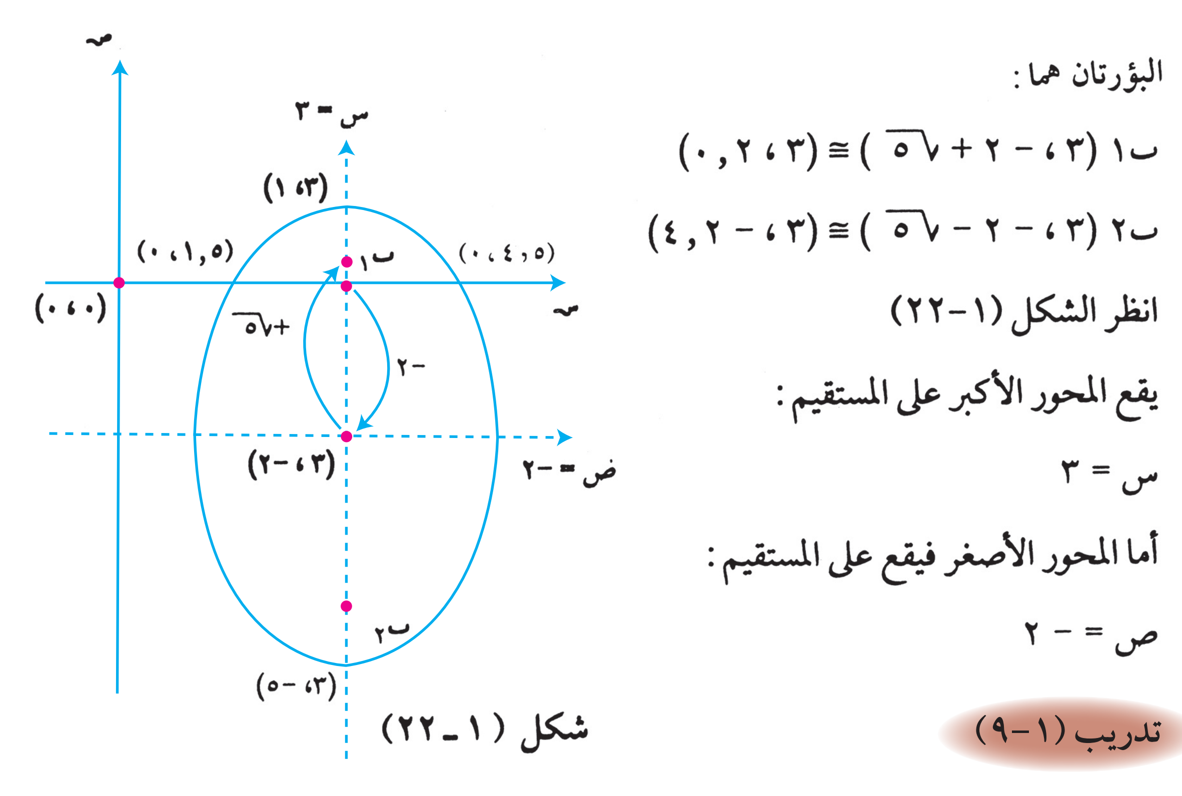
انظر الشكل (١-٢٢)

يقع المحور الأكبر على المستقيم :

س = ٣

أما المحور الأصغر فيقع على المستقيم :

ص = - ٢



شكل (١ ـ ٢٢)

تدريب (١-٩)

أثبت أن المعـادلة : ٩ س^{٢} - ١٨ س + ٤ ص^{٢} + ١٦ ص - ١١ = ٠ تمثّل قطعـاً ناقصـاً وذلك بتحويلها إلى وضع قياسي ومن ثم اذكر صفات هذا القطع .

تمارين (١ – ٢)

في التمارين من (١) إلى (٥) ضع المعادلة في صورة قياسية واستنتج صفات القطع الناقص وارسم المنحنى :

١) $٩ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٣٦$

٢) $٤ س^٢ + ٩ ص^٢ = ١٤٤$

٣) $١٦ س^٢ + ٩ ص^٢ - ٧٢ س + ٥٤ ص + ١٨ = ٠$

٤) $س^٢ + ٢ ص^٢ - ٢ س + ١٢ ص - ١٧ = ٠$

٥) $٩ س^٢ + ٣٦ س + ٤ (ص - ٣)^٢ = ٠$

٦) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (٠ ، ٠) وإحدى بؤرتيه هي (٠ ، ٢) وطول محوره الأكبر يساوي ١٠ وحدات

٧) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٢ ، ٢) وإحدى بؤرتيه (-١ ، ٢) وطول محوره الأكبر يساوي $٢\sqrt{١٠}$ وحدة .

٨) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٢ ، ٥) ، (-٤ ، ٥) وطول محوره الأصغر ٨ وحدات .

٩) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٣ ، -٣) ومحوره البؤري يوازي المحور السيني وطول محوره الأكبر ٢٠ وحدة وطول محوره الأصغر ١٦ وحدة .

١٠) أوجد معادلة القطع الناقص الذي نهايتا محوره الأصغر (٢ ، ١) ، (٢ ، -٧) والبعد بين بؤرتيه ٦ وحدات .

١ - ٤ القطع الزائد

تعريف (١-٣)

القطع الزائد هو مسار نقطة تتحرك في المستوي بحيث يبقى الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوي مقداراً ثابتاً. تُسمى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الزائد.

المعادلة القياسية للقطع الزائد:

(ا) لنفرض أن البؤرتين تقعان على محور س عند النقطتين:

$ب_١$ (حـ ، ٠) ، $ب_٢$ (− حـ ، ٠) ، حيث حـ ∈ $ح^+$.

فتكون المسافة بين البؤرتين = $|ب_١ ب_٢|$ = ٢ حـ ، وتدعى **البعد البؤري**.

ولتكن ن (س ، ص) نقطة تقع على القطع الزائد، كما في الشكل (١-٢٣) ولنرمز للمقدار الثابت بالرمز ٢ ا، حيث ا ∈ $ح^+$، فيكون حسب التعريف (١-٣):

$$\left|\, |ن ب_١| - |ن ب_٢| \,\right| = ٢ ا \qquad (١-٢٠)$$

شكل (١ـ٢٣)

ومن متباينات المثلث $\text{ه}\,\text{ب}_1\,\text{ب}_2$ نجد:

$$|\text{ب}_1\text{ب}_2| + |\text{ه ب}_2| > |\text{ه ب}_1| \Leftrightarrow |\text{ب}_1\text{ب}_2| > |\text{ه ب}_1| - |\text{ه ب}_2| \quad —— (1)$$

$$|\text{ب}_1\text{ب}_2| + |\text{ه ب}_1| > |\text{ه ب}_2| \Leftrightarrow |\text{ب}_1\text{ب}_2| > |\text{ه ب}_2| - |\text{ه ب}_1| \quad —— (2)$$

من (١)، (٢) نستنتج أن:

$$|\text{ب}_1\text{ب}_2| > \Big||\text{ه ب}_2| - |\text{ه ب}_1|\Big| \Leftrightarrow 2\text{حـ} > 2\text{أ}$$

$$\Leftrightarrow \text{حـ} > \text{أ} \Rightarrow \text{حـ}^2 > \text{أ}^2$$

نعود الآن إلى المعادلة (١-٢٠) فنجد:

$$|\text{ه ب}_1| - |\text{ه ب}_2| = \pm 2\text{أ}$$

$$\Leftarrow \sqrt{(\text{س} - \text{حـ})^2 + \text{ص}^2} - \sqrt{(\text{س} + \text{حـ})^2 + \text{ص}^2} = \pm 2\text{أ}$$

$$\Leftarrow \sqrt{(\text{س} - \text{حـ})^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{(\text{س} + \text{حـ})^2 + \text{ص}^2} \pm 2\text{أ}$$

$$\Leftarrow (\text{س} - \text{حـ})^2 + \text{ص}^2 = (\text{س} + \text{حـ})^2 + \text{ص}^2 \pm 4\text{أ}\sqrt{(\text{س} + \text{حـ})^2 + \text{ص}^2} + 4\text{أ}^2 \text{، لماذا؟}$$

$$\Leftarrow \mp 4\text{أ}\sqrt{(\text{س} + \text{حـ})^2 + \text{ص}^2} = 4\text{أ}^2 + 4\text{حـ س}$$

$$\Leftarrow \mp \sqrt{(\text{س} + \text{حـ})^2 + \text{ص}^2} = \text{أ} + \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}\text{س} \text{، بالتقسيم على } 4\text{أ}$$

$$\Leftarrow (\text{س} + \text{حـ})^2 + \text{ص}^2 = \text{أ}^2 + 2\text{حـ س} + \frac{\text{حـ}^2}{\text{أ}^2}\text{س}^2 \text{، لماذا؟}$$

$$\Leftarrow \text{س}^2 + 2\text{حـ س} + \text{حـ}^2 + \text{ص}^2 = \text{أ}^2 + 2\text{حـ س} + \frac{\text{حـ}^2}{\text{أ}^2}\text{س}^2$$

$$\Leftarrow \frac{(\text{حـ}^2 - \text{أ}^2)}{\text{أ}^2}\text{س}^2 - \text{ص}^2 = \text{حـ}^2 - \text{أ}^2$$

$$\Leftarrow \frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{حـ}^2 - \text{أ}^2} = 1 \text{، لماذا؟} \qquad (1-21)$$

وحيث إن $حـ^٢ - ا^٢ > ٠$، لأن $حـ > ا > ٠$ فيمكن أن نعرِّف العدد الموجب: $ب = \sqrt{حـ^٢ - ا^٢}$

فتأخذ المعادلة (١-٢١) الشكل:

$$\frac{س^٢}{ا^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \qquad (١-٢٢)$$

إن المعادلة (١-٢٢) هي المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي بؤرتاه تقعان على المحور سَ .

نتيجة (١ -٥)

من المعادلة (١-٢٢) والشكل (١-٢٤) نستنتج ما يأتي:

(١) $س = \pm \frac{ا}{ب} \sqrt{ص^٢ + ب^٢}$ ، أي أنه لكل قيمة يأخذها المتغير ص توجد قيمتان متناظرتان للمتغير س، وبالتالي فالقطع الزائد متناظر بالنسبة لمحور صَ .

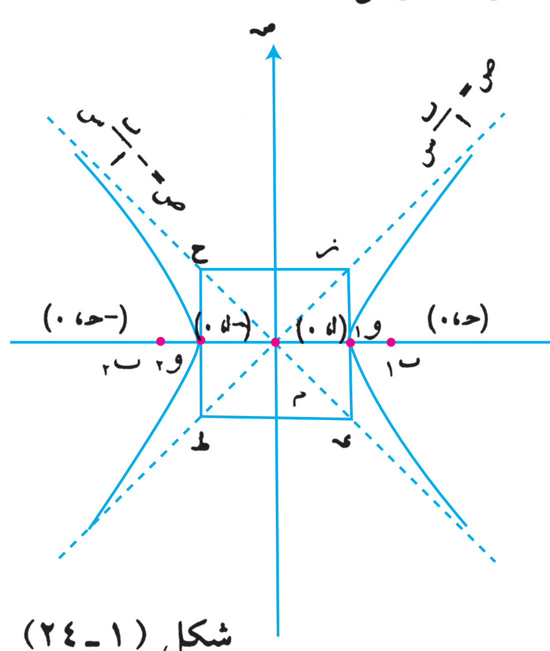
(٢) وبالمثل: $ص = \pm \frac{ب}{ا} \sqrt{س^٢ - ا^٢}$ ويكون ص عدداً حقيقيًّا إذا كان:

$س^٢ - ا^٢ \geq ٠ \Leftarrow س^٢ \geq ا^٢ \Leftarrow |س| \geq ا \Leftrightarrow س \geqslant ا$ أو $س \leqslant -ا$

أي أن $س \notin (-ا ، ا) \Leftrightarrow س \in ح - (-ا ، ا)$

ولكل قيمة يأخذها المتغيّر $س \in ح - (-ا ، ا)$ توجد قيمتان متناظرتان للمتغيِّر ص وبالتالي فالقطع الزائد متناظر بالنسبة لمحور سَ .

(٣) بوضع ص = ٠ في المعادلة (١-٢٢) نحصل على $س = \pm ا$ وهذا يعني أن النقطتين (ا ، ٠) ، (-ا ، ٠) هما نقطتا تقاطع منحنى القطع الزائد مع محور سَ .



شكل (١ ـ ٢٤)

نُسمي هاتين النقطتين **رأسي القطع الزائد**، كما نسمي محور س **المحور القاطع** (أو المحور البؤري) للقطع الزائد.

(٤) بوضع س = ٠ في المعادلة (١-٢٢) نحصل على: $ص^٢ = -ب^٢$ وهذه معادلة مستحيلة الحل في ح. وبالتالي فالمحور ص لا يتقاطع مع القطع الزائد ولذا يسمى المحور ص **المحور غير القاطع** (أو المحور غير البؤري) للقطع الزائد.

(٥) يتقاطع محورا القطع الزائد في النقطة م (٠ ، ٠) وهي مركز تناظر للقطع (لماذا؟).

(٦) $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \Leftrightarrow ص = \pm \frac{ب}{أ}\sqrt{س^٢ - أ^٢}$

$\Leftrightarrow ص = \pm \frac{ب}{أ}|س|\sqrt{١ - \frac{أ^٢}{س^٢}}$

$\Leftrightarrow ص = \pm \frac{ب}{أ}س \sqrt{١ - \frac{أ^٢}{س^٢}}$ لأنَّ $\pm|س| = \pm س$

ولعلَّك تلاحظ أنه مع تزايد |س| فإنّ $\frac{أ^٢}{س^٢}$ يتناقص حتى يقترب من الصفر، وبالتالي فإنَّ منحنى القطع الزائد يقترب من المستقيمين: $ص = \pm \frac{ب}{أ} س$ (١-٢٣)

ولهذا يسمّى هذان المستقيمان «المستقيمين - أو الخطّين - المقاربين» للقطع الزائد الذي مركزه م (٠ ، ٠) ومحوره البؤري (القاطع) هو المحور س ، وهذا يدلّنا على أن القطع الزائد يتألّف من فرعين أحدهما مفتوح من اليمين (نحو إحدى البؤرتين) والآخر مفتوح من اليسار (نحو البؤرة الأخرى).

(٧) في الشكل (١-٢٤) رسمنا المستطيل الذي قطراه محمولان على المستقيمين المقاربين ومركزه م (٠ ، ٠) وأحد بعديه ٢أ ، لعلَّك تلاحظ أن بعده الآخر ٢ب وطول كل من قطريه ٢حـ ، ذلك لأن: ميل م ن = $\frac{|و_١ ن|}{|م و_١|} = \frac{|و_١ ن|}{أ}$ ، من جهة أخرى فإن ميل م ن = $\frac{ب}{أ}$

(لماذا؟) وبالموازنة بين الناتجين تجد أنّ: $|و_1 ن| = ب$. ومن المثلث القائم الزاوية م $و_1$ ن تجد

أنَّ: $|م و_1|^2 + |و_1 ن|^2 = |م ن|^2$ ؛ ولكن $|م و_1| = ا$ ، $|و_1 ن| = ب \Leftarrow |م ن| = ح$.

لأن : $ا^2 + ب^2 = ح^2$.

وهـذا يقـودك إلى طــريقـة عمليـة لـرسم المستقيمين المقـاربين ومن ثـم القطع الـزائد وذلك بالاستعانة برسم المستطيل ن ح ط ى .

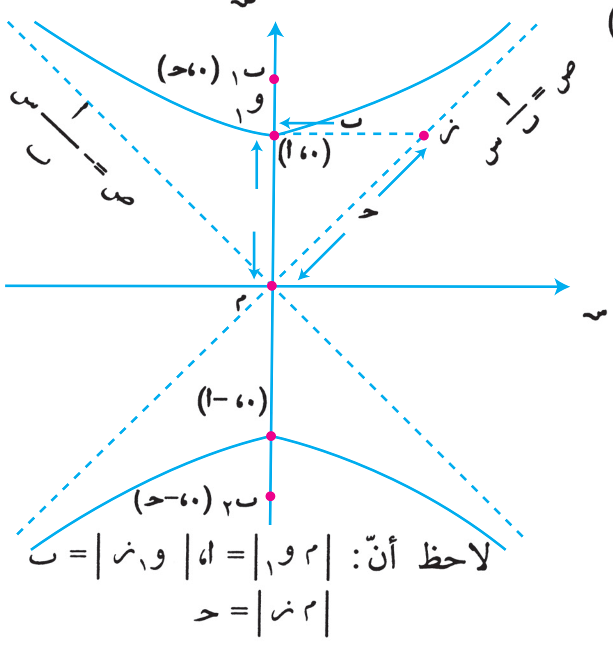
(ب) المعادلة القياسية للقطع الـزائد الذي محوره القاطع ينطبق على المحور ص ومركزه م (٠ ، ٠) ،

فتكـون البـؤرتـان واقعتين على المحـور ص ، وتكـون $ب_1$ (٠ ، ح) ، $ب_2$ (٠ ، − ح) وتصبح المعادلة القياسية للقطع الزائد من الشكل :

$$\frac{ص^2}{ا^2} - \frac{س^2}{ب^2} = ١ \qquad (١-٢٤)$$

حيث تمثل النقطتــان (٠ ، ا) ، (٠ ، − ا) رأسي القطع الــزائد ويمثّل الخطّين المقــاربين المستقيمان : $ص = \pm \frac{ا}{ب} س$ (١-٢٥)

كما في الشكل (١-٢٥)



شكل (١ ـ ٢٥)

مثال (١-١١)

عين البؤرتين والرأسين والمستقيمين المقاربين للقطع الزائد الذي معادلته :

٩ س^{٢} − ١٦ ص^{٢} = ١٤٤ ثم ارسمه .

الحـــل :

بالقسمة على ١٤٤ نحصل على : $\frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

وبموازنة هذه المعادلة مع المعادلة (١-٢٢) نستنتج أن :

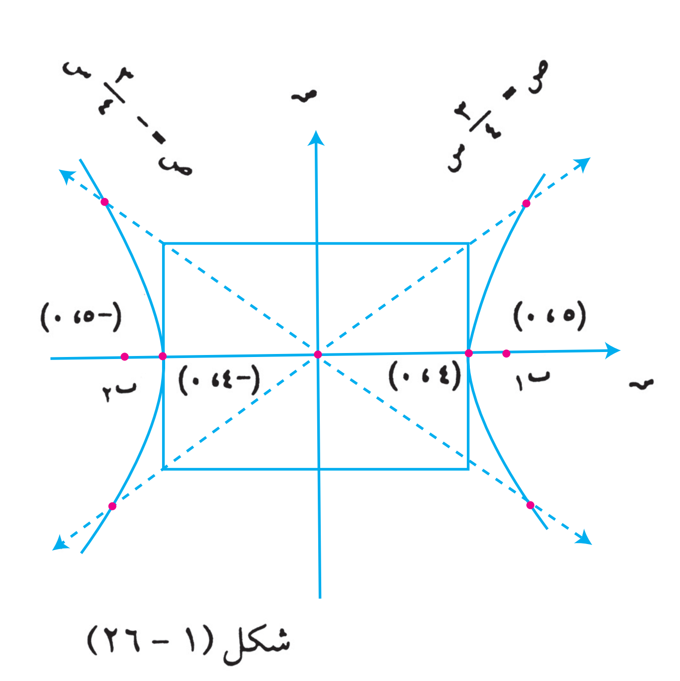
ا^{٢} = ١٦ ⟸ ا = ٤ ، ب^{٢} = ٩ ⟸ ب = ٣ ،

حـ^{٢} = ا^{٢} + ب^{٢} = ٢٥ ⟸ حـ = ٥ ، ومنه :

البؤرتان : (٥ ، ٠) ، (−٥ ، ٠) .

الرأسان : (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠) .

المستقيمان المقاربان : ص = ± $\frac{٣}{٤}$ س .



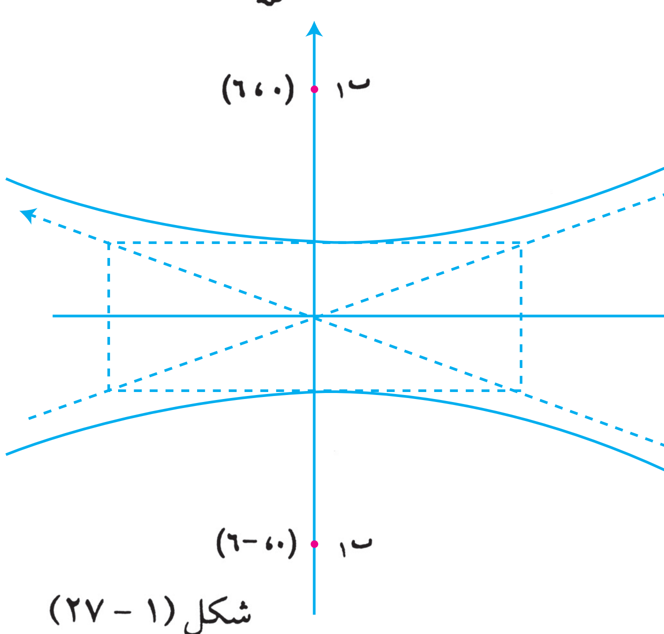
شكل (١ − ٢٦)

تدريب (١-١٠)

أعد حل المثال (١-١١) عندما تكون معادلة القطع الزائد : ١٦ س^{٢} - ٩ ص^{٢} = ١٤٤

مثال (١-١٢)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي تقع بؤرتاه في النقطتين (٠ ، ± ٦) ورأساه هما (٠ ، ± ٢)، ثم ارسم المنحنى البياني الذي يمثله .



شكل (١ - ٢٧)

الحــل :

حيث إن حـ = ٦ ، ا = ٢ فإن :

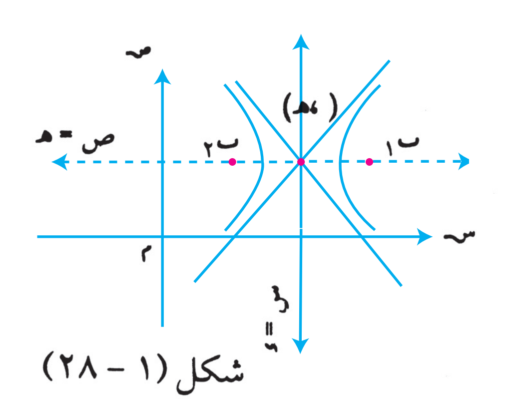
ب = $\sqrt{\text{حـ}^{٢} - \text{ا}^{٢}}$ = $\sqrt{٣٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$

ولما كانت البؤرتان تقعان على محور ص فإن معادلة القطع الزائد من الشكل (١-٢٤) وتكون :

$$\frac{\text{ص}^{٢}}{٤} - \frac{\text{س}^{٢}}{٣٢} = ١$$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة(ء ، هـ) ومحوراه يوازيان محوري س ، ص : بطريقة مماثلة لما فعلناه في حالة القطع الناقص

(١) بالاستعانة بالشكل(١ - ٢٨)تكون معادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع يوازي محور س :



شكل (١ - ٢٨)

$$\frac{(س - ء)^2}{ا^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1 \qquad (1-26)$$

ولعلَّك تـلاحظ أن: $ب_1$ (ء + ح ، هـ) ، $ب_2$ (ء − ح ، هـ)؛ وأن الـرأسين: (ء + ا ، هـ) ، (ء − ا ، هـ)؛ وأن معادلتي المستقيمين المقاربين:

$$ص - هـ = \pm \frac{ب}{ا}(س - ء) \qquad (1-27)$$

(٢) وبـالاستعـانـة بـالشكل (١ ـ ٢٩) ستجـد أنّ معـادلة القطع الـزائد الـذي محوره القاطع يوازي محور ص:

$$\frac{(ص - هـ)^2}{ا^2} - \frac{(س - ء)^2}{ب^2} = 1 \qquad (1-28)$$

ولعلَّك تلاحظ أن: $ب_1$ (ء ، هـ + ح) ، $ب_2$ (ء ، هـ − ح) .

شكل (١ ـ ٢٩)

تدريب (١-١١)

مستفيـداً من المعـادلـة (١ ـ ٢٨) ومن الشكل (١-٢٩) عيّن الـرأسين والمستقيمين المقاربين في هذه الحالة .

مثال (١-١٣)

بيِّن أن المعـادلـة $س^2 - 4ص^2 + 2س + 8ص - 7 = 0$ تمثل قطعاً زائداً، ثم استنتج صفاته وارسم المنحنى البياني له .

الحــل :

بإكمال المربع على س ، ص نجد :

$$(س^٢ + ٢ س + ١) - ٤ (ص^٢ - ٢ ص + ١) = ٧ + ١ - ٤$$

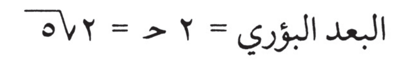
$$\Leftrightarrow (س + ١)^٢ - ٤ (ص - ١)^٢ = ٤$$

$$\Leftrightarrow \frac{(س + ١)^٢}{٤} - \frac{(ص - ١)^٢}{١} = ١$$

وهذه من جنس المعـادلة (١-٢٦)، فهي إذن تمثل قطعاً زائداً مـركزه (ء ، هـ) = (- ١ ، ١)،

كما أنَّ محوريه هما : س = - ١ ، ص = ١ ورأسيه هما : (١ ، ١) ، (- ٣ ، ١) .

وبؤرتيه هما : $ب_١ (- ١ + \sqrt{٥} ، ١)$ ، $ب_٢ (- ١ - \sqrt{٥} ، ١)$



البعد البؤري = ٢ حـ = $٢\sqrt{٥}$

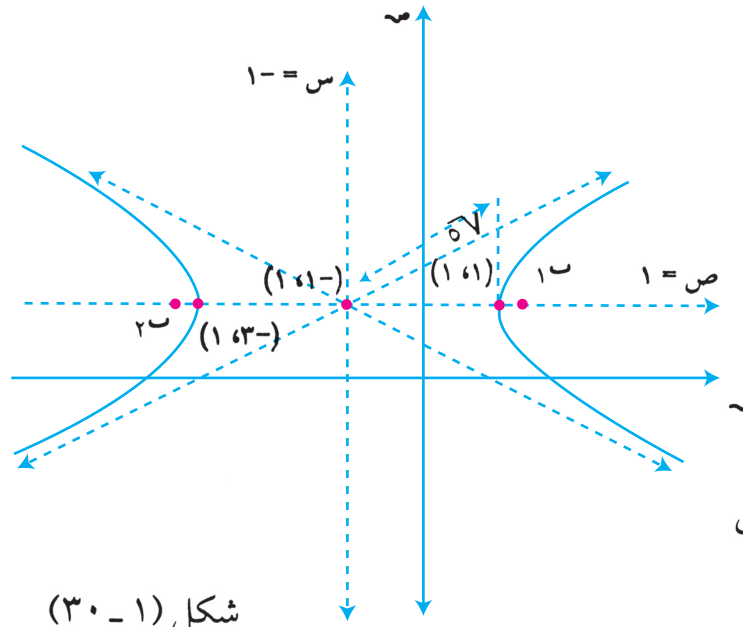
البعد بين الرأسين = ٢ أ = ٤

المستقيمين المقاربين هما :

$$ص - ١ = \frac{١}{٢} (س + ١) ،$$

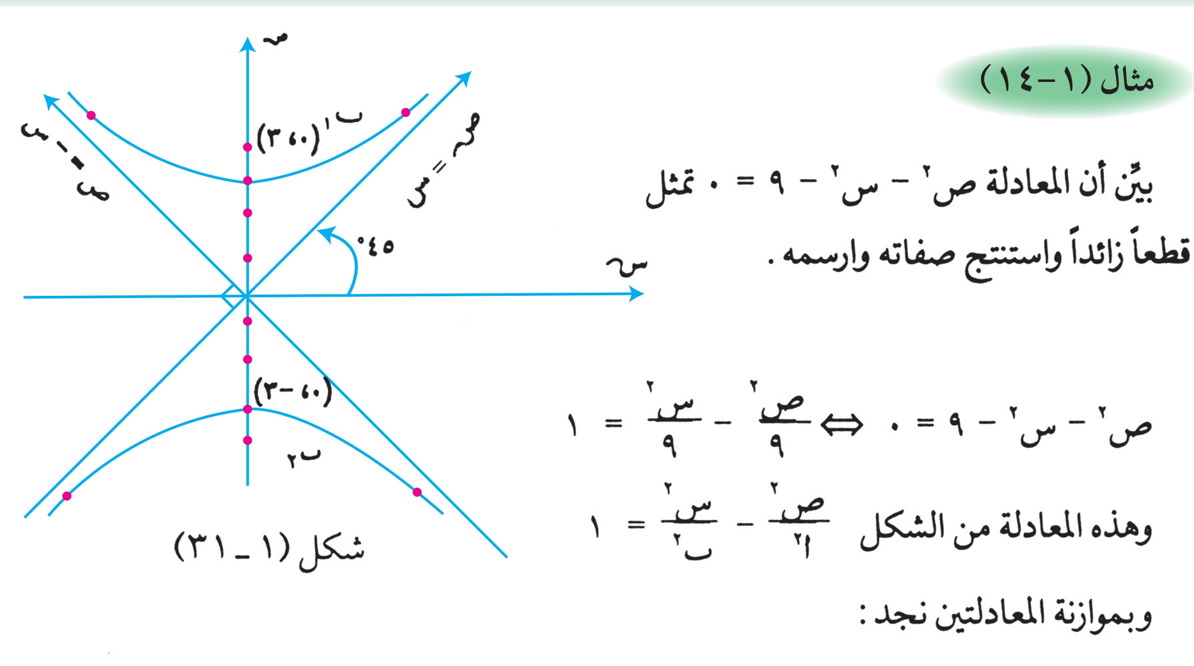
$$ص - ١ = -\frac{١}{٢} (س + ١) ،$$

المنحنى البياني للقطـع الزائد، كما فى الشكل (١ ـ ٣٠) .



شكل (١ ـ ٣٠)

مثال (١-١٤)



شكل (١ ـ ٣١)

بيِّن أن المعادلة ص^{٢} − س^{٢} − ٩ = ٠ تمثل قطعاً زائداً واستنتج صفاته وارسمه .

$$\text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢} - ٩ = ٠ \Leftrightarrow \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} - \frac{\text{س}^{٢}}{٩} = ١$$

وهذه المعادلة من الشكل $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

وبموازنة المعادلتين نجد :

$$\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢} = ٩ \Leftarrow \text{أ} = \text{ب} = ٣ \Leftarrow \text{حـ} = \sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}} = ٣\sqrt{٢}$$

إذن المعادلة المعطاة تمثل قطعاً زائداً مركزه (٠ ، ٠) ومحوره القاطع (البؤري) منطبق على المحور ص وبؤرتاه هما(٠ ، ٣$\sqrt{٢}$) ، (٠ ، − ٣$\sqrt{٢}$) : ورأساه هما (٠ ، ٣) ، (٠ ، −٣) ومستقيماه المقاربان هما : ص = ± س . الرسم البياني للقطع كما في الشكل (١ ـ ٣١)

لاحظ أن المستقيمين المقاربين في هذا المثال متعامدان (لماذا؟) . يقال إن القطع الزائد **متساوي الساقين** في مثل هذه الحالة ، أي التي يكون فيها أ = ب .

تمارين (١ – ٣)

في التمارين من (١) إلى (٦) ضع المعادلة في الصورة القياسية للقطع الزائد، ومن ثم حدد معادلتي محوريه وحدد بؤرتيه ورأسيه وخطيه المقاربين، ثم ارسمه بيانياً.

١) $٩ س^٢ - ١٦ ص^٢ = ٥٧٦$

٢) $١٦ س^٢ - ٩ ص^٢ = - ١٤٤$

٣) $س^٢ - ٢٥ ص^٢ = ١٠٠$

٤) $ص^٢ - ٤ س^٢ - ٤ ص + ٨ = ٠$

٥) $٤ س^٢ - ٥ ص^٢ - ١٦ س + ١٠ ص + ٣١ = ٠$

٦) $٥ س^٢ - ٤ ص^٢ + ٢٠ س + ٨ ص - ٤ = ٠$

٧) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٥ ، ٠) ، (–٥ ، ٠)، وطول محوره القاطع يساوي ٨ وحدات .

٨) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٢ ، –٤) وإحدى بؤرتيه (٧ ، –٤) وطول محوره القاطع ٨ وحدات . ثم عين البؤرة الثانية .

في التمارين من (٩) إلى (١٣) استنتج معادلة القطع الزائد :

٩) الخطان المقاربان ص = ± ٢ س، الرأسان (± ٦ ، ٠) .

١٠) الخطان المقاربان ص = ± ٢ س، الرأسان (٠ ، ± ٤) .

١١) البؤرتان (± ٨ ، ٠)، الرأسان (± ٤ ، ٠) .

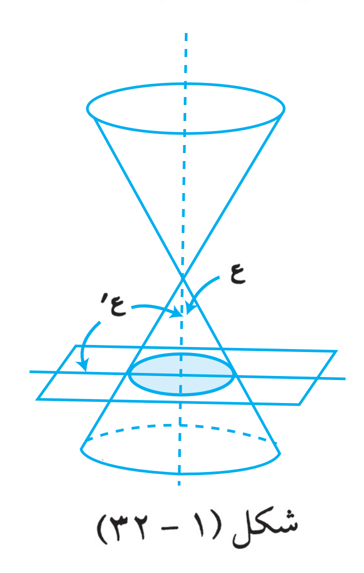
١٢) مسار نقطة تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها عن (٢ ، ٠) ، (٢ ، ١٢) يساوي ٣ .

١٣) مسار نقطة تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها عن (٤ ، ٠) ، (–٤ ، ٠) يساوي ٢ .

١ ـ ٥ القطـوع المخروطيـة ومعـادلـة الدرجـة الثـانيـة

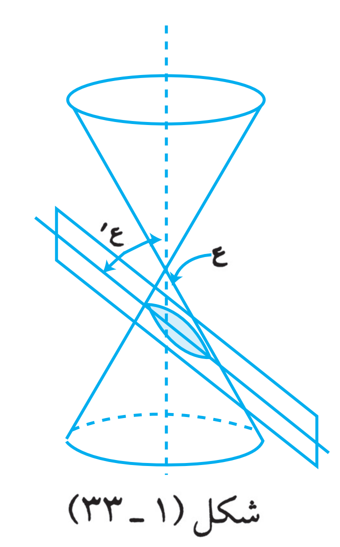
إن القطع المكافئ والقطع الناقـص والقطع الزائد كلهـا تسمى قطـوعاً مخروطيـة ، والسبب في ذلك أنـه لـو تخيّلنا سطحـاً مخروطيًّا دائريًّـا قائماً زاويـة رأسـه ٤٢ كما في الشكل (١ - ٣٢) قُطع بمستويات مختلفة لا تمرّ برأسه فإننا نحصل على أحد هذه القطوع ، كما يتضح في الحالات الآتية :

(١) إذا كـان المستوي القـاطع عموديًّـا على محور السطح المخـروطي كما في الشكل (١ - ٣٢) فـإن تقـاطع المستـوي مع السطـح المخـروطي يكون دائرة .



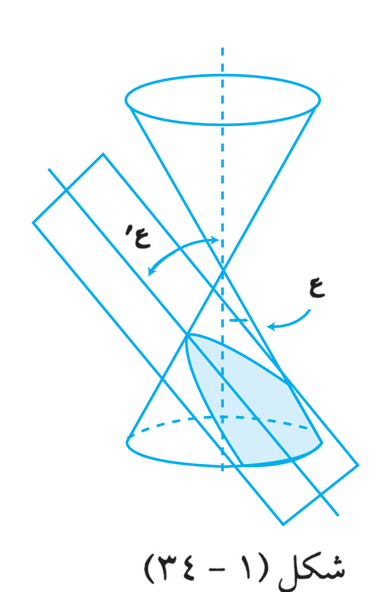
شكل (١ - ٣٢)

(٢) إذا كان المستـوي القاطع يميل على محور السطح المخـروطي بـزاويـة ع' ، حيث ع < ع' < $\frac{ط}{٢}$ فإن المقطع يكـون قطعـاً نـاقصـاً كما في الشكل (١ - ٣٣) .



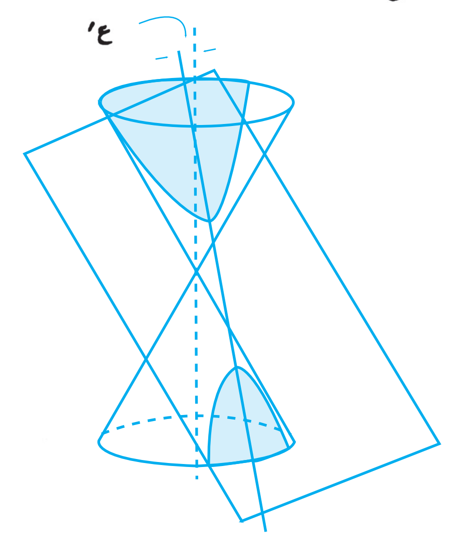
شكل (١ ـ ٣٣)

(٣) إذا كان المستوي القاطع يميل على محور السطح بزاوية ع′ = ع فإن المقطع يكون قطعاً مكافئاً، كما في الشكل (١ - ٣٤)



شكل (١ - ٣٤)

(٤) إذا كان المستوي القاطع يميل على محور السطح بزاوية ع′ بحيث ٠ ≤ ع′ < ع فإن المقطع الناتج يكون قطعاً زائداً كما في الشكل (١ - ٣٥)



شكل (١ - ٣٥)

نعود الآن إلى المعادلة (١-٢) أي:

ا س٢ + ب ص٢ + حـ س + ى ص + هـ = ٠ (١-٢)

التي تمثّل معادلة من الدرجة الثانية في المتغيرين س ، ص، فلعلّك تلاحظ أنَّ هذه المعادلة - إذا سمحت قيم معاملاتها ا ، ب ، حـ ، ى ، هـ بوجود حلول حقيقية لها - تمثّل أحد القطوع المخروطية ونكتفي لبيان ذلك بإيراد الأمثلة الآتية:

مثال (١-١٥)

عيّن نوع المنحنى الذي تمثله المعادلة (١-٢) - في حالة وجوده - في كلٍّ من الحالات الآتية :

(١) ا = ١ ، ب = ٠ ، حـ = - ٤ ، ء = - ١ ، هـ = ٣

(٢) ا = ١ ، ب = ٤ ، حـ = - ٢ ، ء = ١٦ ، هـ = - ٤٧

(٣) ا = ٢ ، ب = - ١ ، حـ = - ٢ ، ء = - ٤ ، هـ = ٠

(٤) ا = ٢ ، ب = ٣ ، حـ = ٤ ، ء = - ٦ ، هـ = ١١

الحـــل :

(١) المعادلة هي : $س^٢ - ٤ س - ص + ٣ = ٠$

أو : $ص = س^٢ - ٤ س + ٣$ وهي معادلـة قطع مكافئ من الشكل (١-١٣) محوره موازٍ للمحور ص وفتحته نحو الأعلى.

(٢) المعادلة هي : $س^٢ + ٤ ص^٢ - ٢ س + ١٦ ص - ٤٧ = ٠$

وتكتب بالشكل : $(س^٢ - ٢ س + ١) + ٤ (ص^٢ + ٤ ص + ٤) = ٦٤$

أو : $\frac{(س - ١)^٢}{٦٤} + \frac{(ص + ٢)^٢}{١٦} = ١$

فهي معادلة قطع ناقص مركزه (١ ، -٢) ومحوره الأكبر (البؤري) يوازي المحور س

(٣) المعادلة هي : $٢ س^٢ - ص^٢ - ٢ س - ٤ ص = ٠$

وتكتب بالشكل : $٢(س^٢ - س + \frac{١}{٤}) - (ص^٢ + ٤ ص + ٤) = \frac{١}{٢} - ٤$

أو : $\frac{(ص + ٢)^٢}{\frac{٧}{٢}} - \frac{(س - \frac{١}{٢})^٢}{\frac{٧}{٤}} = ١$

فهي معادلة قطع زائد مركزه ($\frac{١}{٢}$ ، -٢) ومحوره القاطع (البؤري) يوازي المحور ص.

(٤) المعادلة هي : $٢ س^٢ + ٣ ص^٢ + ٤ س - ٦ ص + ١١ = ٠$

وتكتب بالشكل : $٢ (س^٢ + ٢ س + ١) + ٣ (ص^٢ - ٢ص + ١) = -١١ + ٥$

أو : $٢ (س + ١)^٢ + ٣ (ص - ١)^٢ = - ٦$

ولعلَّك تلاحظ أنَّ الطرف الأيمن مجموع مربَّعين، فكل منهما أكبر أو يساوي الصفر، بينما الطرف الأيسر سالب، وبالتالي فلا يوجد منحنى حقيقي يمثّل هذه المعادلة.

تدريب (١-١٢)

أعد السؤال الوارد في المثال (١-١٥) في الحالات الآتية:

ا = ب = هـ = ١ ، حـ = ء = ٠

ا = ب = ١ ، حـ = ء = هـ = ٠

ا = - ب ، حـ = ء = هـ = ٠

ا = ب = ٣ ، حـ = ٦ ، ء = هـ = -٣٠

ا = ب = حـ = ١ ، ء = ٣ ، هـ = ٥

ا = ب = ١ ، حـ = ٠ ، ء = -٧ ، هـ = $\frac{٤٩}{٤}$

نتيجة (١-٦)

لعلك تستنتج أنه في حالة كون المعادلة (١-٢) تمثِّل قطعاً حقيقيًّا، ففي حالة القطع المكافئ: ا ، ب أحدهما يساوي الصفر؛ وفي حالة القطع الناقص: ا ، ب من إشارة واحدة أي: ا ب > ٠ وفي حالة القطع الزائد: ا ، ب من إشارتين مختلفتين أي: ا ب < ٠.

مثال (١-١٦)

أي قطع تمثّله المعادلة : $س^٢ + ٩ ص^٢ + ٢ س - ١٨ ص + ١ = ٠$

الحـــل :

لمّا كان ا = ١ ، ب = ٩ فإنَّ ا . ب > ٠ وبالتـالي فالمعادلـة إنْ مثَّلت قطعاً مخروطيًّا فهو قطع ناقص ؛ وبالإكمال إلى المربّع على كلٍّ من س ، ص نجد :

$(س^٢ + ٢ س + ١) + ٩ (ص^٢ - ٢ ص + ١) = - ١ + ١ + ٩$

أو: $(س + ١)^٢ + ٩ (ص - ١)^٢ = ٩$

$\frac{(س + ١)^٢}{٩} + \frac{(ص - ١)^٢}{١} = ١$ (قطع ناقص مركزه (- ١ ، ١) ومحوره البؤري (المحرقي) يوازي المحور سَ).

تمارين (١ – ٤)

صنِّف المعادلات الآتية من حيث نوع القطع المخروطي الذي تمثّله إن وجد :

١) ٣ س^{٢} – ٢ ص^{٢} – ١٢ س + ٨ ص + ٩ = ٠

٢) ٢٥ س^{٢} + ٩ ص^{٢} + ٥٠ س + ٩٠ ص + ٢٥ = ٠

٣) س^{٢} + ٢ ص + ٨ س + ١٠ = ٠

٤) س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س – ٦ ص + ١٨ = ٠

٥) ص^{٢} – $\frac{١}{٢}$ س^{٢} = س

٦) ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٤ س – ٦ ص + ٧ = ٠

تمارين عامة

١) إذا علمت أن الدائرة يمكن تعريفها بالصيغتين المتكافئتين كما يلي :

(ا) الدائرة هي مسار نقطة تتحرك في المستوي بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة فيه (هي مركز الدائرة) يساوي مقداراً ثابتاً (هو نصف قطر الدائرة) .

(ب) الدائرة هي مجموعة كل النقاط في المستوي المتساوية في بعدها عن نقطة ثابتة فيه .

فالمطلوب إعطاء تعريف مشابه لفقرة (ب) لكل من القطوع المخروطية الثلاثة التي درستها .

في التمارين من (٢) إلى (٦) ضع المعادلة في الصورة القياسية ومن ثم حدد نوع القطع المخروطي وصفاته وارسم الشكل البياني الذي يمثله .

٢) س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س + ٦ ص – ٣ = ٠

٣) ٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} – ٨ س – ٣٦ ص + ٤ = ٠

٤) $س^٢ + ٦ س - ١٦ ص - ٧ = ٠$

٥) $س^٢ + ٤ س = ص^٢ + ٢ ص - ٥$

٦) $٤ س^٢ - ٥ ص^٢ - ١٦ س + ١٠ ص - ٢٩ = ٠$

أوجد المعادلات القياسية للقطوع الآتية :

٧) قطع مكافئ رأسه (١ ، ٤) ويمر بالنقطة (٠ ، ٠) إذا كان :

(أ) محور تناظره يوازي المحور السيني .

(ب) محور تناظره يوازي المحور الصادي .

٨) قطع ناقص مركزه (٠ ، ٠) ونقطتا تقاطعه مع محور س هما (± ٦ ، ٠) ونقطتا تقاطعه مع محور ص هما (٠ ، ± ٤) .

٩) قطع ناقص مركزه (٤ ، -٣) ونقطتا تقاطعه مع محور تناظره الأفقي هما : (٩ ، -٣) ، (-١ ، -٣) ونقطتا تقاطعه مع محور تناظره الرأسي هما : (٤ ، ١) ، (٤ ، -٧) .

١٠) قطع زائد رأساه (± ٣ ، ٠) ومستقيماه المقاربان هما :

$ص = ± ٢ س$

١١) قطع زائد رأساه هما (٠ ، ± ٤) ويمر بالنقطة (٢ ، ٨) .

١٢) (أ) ضع كلاً من المعادلتين التاليتين في صورتها القياسية :

$٤س^٢ + ص^٢ - ٨ س + ٤ ص + ٤ = ٠$

$٤س^٢ - ص^٢ - ٨ س - ٤ ص - ٤ = ٠$

(ب) ماذا يمكن أن تستنتجه من (أ) ؟

(حـ) ارسم على الشكل نفسه التمثيل البياني للمعادلتين .

الباب الثاني

المتتابعات والمتسلسلات

٢ – ١ المتتابعات.

٢ – ٢ المتتابعات الحسابية والهندسية.

٢ – ٣ المتسلسلات الحسابية والهندسية.

٢ – ٤ نهاية المتتابعة غير المنتهية.

٢ – ٥ المتسلسلات غير المنتهية.

٢ ـ ١ المتتـابعـات :

إن مفهوم المتتـابعة يلعب دورًا كبيرًا في البناء الـرياضي والتطبيقات الـرياضية . وفي هـذا البند نتطرق إلى تعريف المتتابعات وخواصها الأساسية .

ليتخيل الطالب أن لدينا عددًا من الصناديق المرقمة .

□   □   □ ---------------- □   والتي عددها م

١   ٢   ٣   م

ولنفرض أننا وضعنا في الصندوق الأول عددًا ما ولنرمز له بالرمز $ا_١$ وبالمثل نضع عددًا ثانيًا $ا_٢$ في الصندوق الثاني وهلم جرًا مع باقي الصناديق لنحصل على الترتيب الآتي :

$ا_١$ $ا_٢$ $ا_٣$ ---------------- $ا_م$ والذي

١   ٢   ٣   م

نسميه متتابعة ونرمز لها بالرمز ($ا_١$، $ا_٢$، --- ، $ا_م$) .

تدريب (٢-١)

(١) ليكن لدينا ١٠ صناديق مرقمة ، أوجد ما يأتي :

(أ) المتتابعـة التي تنتج إذا وضعنا في الصنـدوق الأول العدد ٣ ، وفي كل صنـدوق آخر نضع ضعف العدد الموجود في الصندوق السابق له في الترقيم .

(ب) المتتابعة التي تنتج إذا وضعنا في الصندوق الأول العدد – ٢ ثم نضع في كل صندوق آخر العدد الموجود في الصندوق السابق له بعد ضربه بالعدد ـ ٣ .

(٢) لنفرض لدينـا عددًا غير منته من الصناديــق المرقمة ، فإذا وضعنـا في كل صندوق رقمه ن العدد $ا_ن = ٢ ن + ١$ فما هي المتتابعة الناتجة؟

إذا تمعنـا في وصفنا للمتتـابعة في الشرح السـابق فنجـد أن كل رقم لصندوق ل يقـابله عـدد

حقيقي $ا_ن$ وهو العدد الذي وضعناه في هذا الصندوق، أي يمكن اعتبار المتتابعة دالة د مجالها مجموعة أرقام الصناديق، أي المجموعة {١، ٢، ٣، ------، م} ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح حيث د (ن) = $ا_ن$ ؛ بينما في حالة كون عدد الصناديق غير منته كما في الجزء الثاني من التدريب (٢ ــ ١) فإن مجال د هو مجموعة الأعداد الطبيعية ط . ويمكننا الآن إيراد التعريف الرياضي للمتتابعة:

تعريف (٢ - ١)

المتتابعة المنتهية والتي عدد حدودها م هي أي دالة د : {١، ٢، ---، م} ⟵ ح والمتتابعة غير المنتهية هي أي دالة د : ط ⟵ ح وإذا كانت د متتابعة (منتهية أو غير منتهية) وكانت ن عنصرًا في مجال د فإننا نرمز للصورة د (ن) بالرمز $ا_ن$ ونسميه الحد النوني للمتتابعة، كما نكتب المتتابعة المنتهية على الصورة ($ا_١$، $ا_٢$، ---، $ا_م$) وغير المنتهية على الصورة ($ا_١$، $ا_٢$، $ا_٣$، ---) .

ملحوظة (٢ - ١):

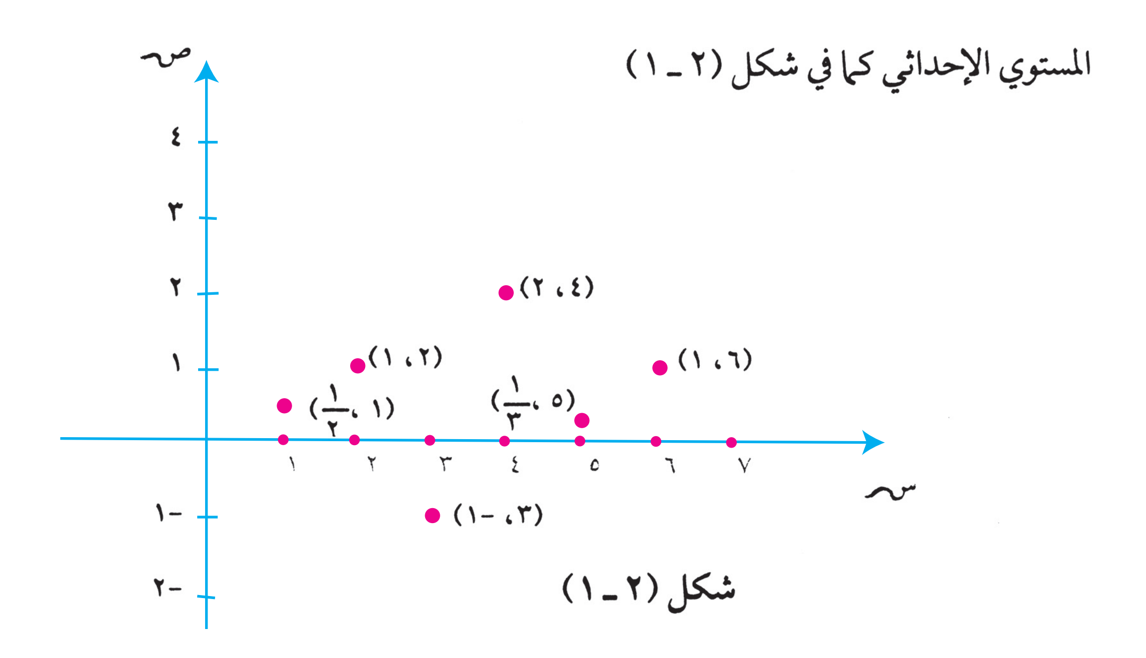
بما أن أي متتابعة عبارة عن دالة:

د : هـ ⟵ ح حيث هـ = {١، ٢، ---، م} في حالة أنّ المتتابعة منتهية وعدد عناصرها م أو هـ = ط في حالة أنّ المتتابعة غير منتهية ـ فإنه يمكن رسم بيانها {(ن، د (ن)) : ن ∈ هـ} في المستوى الإحداثي؛ فمثلا المتتابعة:

($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، -١ ، ٢ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١) بيانها هو:

{(١، $\frac{١}{٢}$)، (٢، ١)، (٣، -١)، (٤، ٢)، (٥، $\frac{١}{٣}$)، (٦، ١)} وتمثيلها في

المستوي الإحداثي كما في شكل (٢ ـ ١)



شكل (٢ ـ ١)

مثال (٢-١)

(أ) أوجد عدد حدود المتتابعة (٢ ، ٤ ، ٦ ، ---- ، ١٦) ومن ثم استنتج صيغة جبرية للحد النوني لها ومثلها بيانيًا في المستوى الإحداثي.

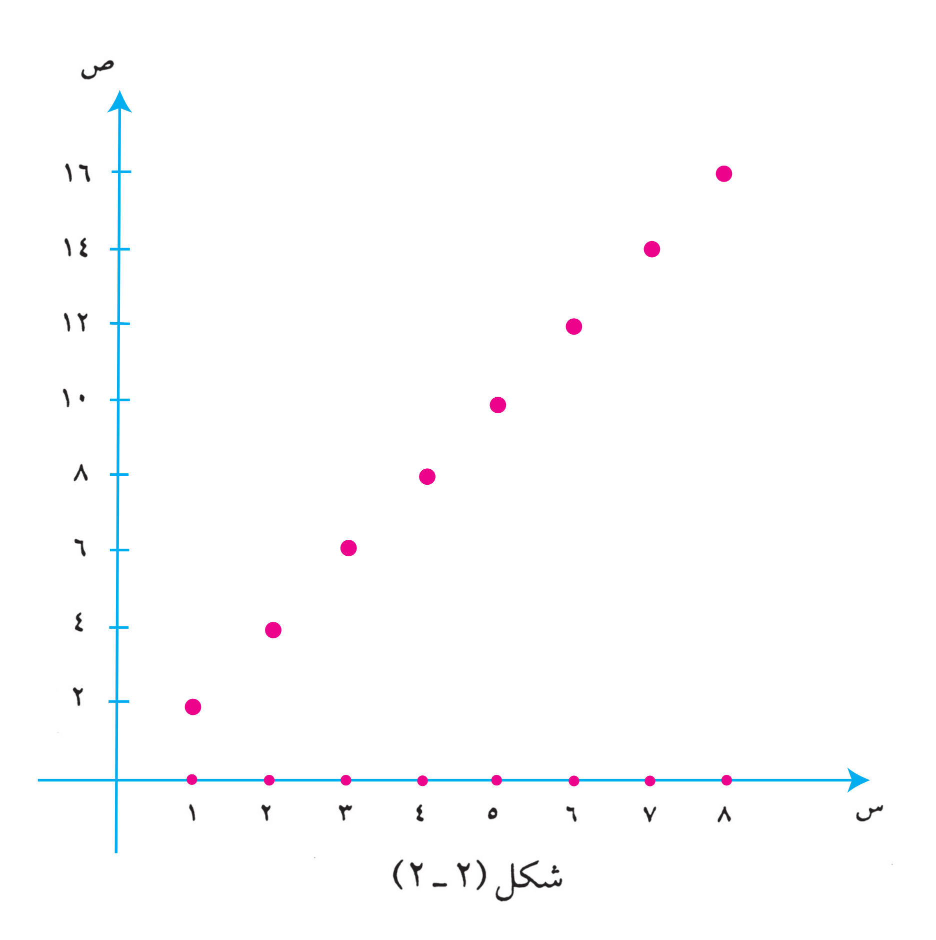
(ب) أوجد الحد النوني للمتتابعة غير المنتهية (١ ، - ١ ، ١ ، - ١ ، ----) ومثلها بيانيًا في المستوى الإحداثي.

الحـــل:

(أ) بملاحظة أن $ا_{١} = ٢$ ، $ا_{٢} = ٤$ ، $ا_{٣} = ٦$

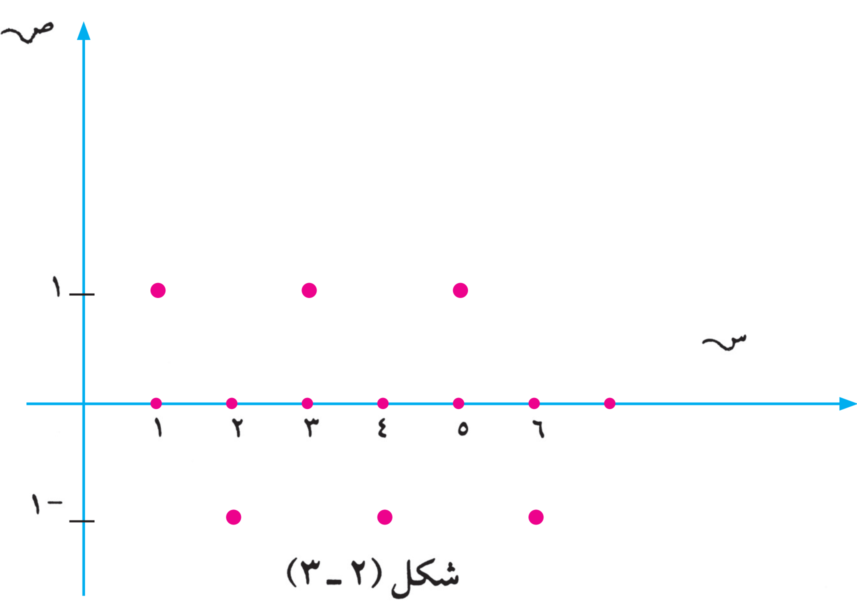
أي أن كل حد في المتتابعـة يساوي ضعف ترتيب تسلسله في المتتابعة أو بعبـارة أخرى ترتيب الحد يساوي نصف قيمته، وبالتالي فإن تـرتيب آخر حد في المتتابعة هو $\frac{١٦}{٢} = ٨$ (أي أنّ $ا_{١٠} = ٢٠$ لو كـان عدد الحدود ١٠ مثلاً)؛ ويكون الحد النـوني هو $ا_{ن} = ٢ن$ حيث $١ \le ن \le ٨$ وتمثل

بيانيًا كما في الشكل (٢ ـ ٢) :



شكل (٢ ـ ٢)

(ب) إن حدود المتتابعة (١ ، – ١ ، ١ ، – ١ ، ----) تتناوب القيمتين ١ ، – ١ ، حيث الحدود ذات الترتيب الفردي تأخذ القيمة ١ ، بينما ذات الترتيب الزوجي تأخذ القيمة – ١ ويمكن توحيدهما بالصيغة الجبرية $ا_{ن} = (-١)^{ن+١}$ والتي تحدد قيمة الحد النوني لأي قيمة فردية أو زوجية . وتمثّل هذه المتتابعة بيانيا كما في الشكل (٢ ـ ٣) .



شكل (٢ ـ ٣)

ملحوظـة (٢ – ٢) :

(١) في المثال السابق استطعنا أن نعبِّر عن الحد النـوني بصيغة جبرية تمكننا من الحصول على قيمة أي حد نـريده في المتتـابعة ؛ فمثـلاً : في المتتابعـة الأولى حيث $ا_ن = ٢ن$ فإنّ $ا_٦ = ٢ \times ٦ = ١٢$، وكذلك في المتتابعة الثانية حيث $ا_ن = (-١)^{ن+١}$ فإن $ا_{٩٩} = (-١)^{١٠٠} = ١$. ولكن هذا لا يعني أن الحد النـوني لكل متتابعة له صيغـة جبرية ؛ فمثلا : متتابعـة الأعداد الأوليـة (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ----) لا يعرف لحدها النوني صيغة جبرية .

(٢) للاختصار في الكتابة سنرمز للمتتابعة المنتهية ($ا_١$ ، $ا_٢$ ، ------ ، $ا_م$) بالرمز $\{ا_ن\}_{ن=١}^{م}$ بينما المتتابعة غير المنتهية ($ا_١$ ، $ا_٢$ ، $ا_٣$ ، ----) فنرمز لها بـالرمز $\{ا_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ وفي حالة معـرفتنا لعدد عناصر المتتابعة فإننا نكتفي بالرمز لها على الصورة $\{ا_ن\}$.

(٣) يمكن استعمال رموز أخـرى للمتتابعات عند الحاجـة ؛ مثلاً : $\{ب_ن\}$، $\{حـ_ن\}$، $\{ح_ن\}$ حيث $ب_ن$ ، $حـ_ن$ ، $ح_ن$ هي الحدود النونية لهذه المتتابعات .

تساوي متتابعتين :

الآن نتطرق إلى تساوي متتابعتين فحيث إنه سبق للطالب دراسة تساوي دالتين فتتساوى متتابعتان إذا تساوتا باعتبارهما دالتين فنحصل على التعريف الآتي :

تعريف (٢ ـ ٢) :

نقول إن المتتابعتين $\{ا_ن\}$ ، $\{ب_ن\}$ متساويتان إذا تحقق أحد الشرطين :

(أ) كلا المتتابعتين منتهيتان ولهما العدد نفسه من العناصر و $ا_ن = ب_ن$ لجميع قيم ن .

(ب) كلا المتتابعتين غير منتهيتين و $ا_ن = ب_ن$ لجميع قيم ن .

مثال (٢-٢)

بين أيًا من المتتابعات الآتية تتساوى فيما بينها :

(أ) (- ٢ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، -------) .

(ب) $\{ا_ن\}_{ن=١}^{٦}$ حيث $ا_ن = ن^٢ - ٣$.

(جـ) $\{ب_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ حيث $ب_ن = ٣ن - ٥$.

(د) (- ٢ ، ١ ، ٦ ، ١٣ ، ٢٢ ، ٣٣) .

(هـ) (- ٢ ، ١ ، ٧ ، ٤ ، ١٠ ، ----------) .

الحــل :

بما أن المتتابعة في (ب) منتهية فلا يمكن أن تساوي أيًا من المتتابعات غير المنتهية الواردة في الفقرات (ا) ، (حـ) ، (هـ) . كما نلاحظ بالتعويض عن قيم ن في الحد النوني $ا_ن = ن^٢ - ٣$ أننا نحصل على المتتابعة (- ٢، ١ ، ٦ ، ١٣ ، ٢٢ ، ٣٣) وهي المتتابعة نفسها الواردة في (د) وبالتالي فهما متساويتان . أيضا بالتعويض عن قيم ن في الحد النوني للمتتابعة الواردة في (حـ) نحصل على المتتابعة (- ٢ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، -------) وهي المتتابعة نفسها الواردة في (ا) لذلك فهما متساويتان ولكنهما لا تساويان المتتابعة الواردة في (هـ) لأنه في المتتابعة الأخيرة $ا_٣ = ٧$ لا يساوي الحد المناظر في كل من (ا)، (حـ) .

تمارين (٢ - ١)

(١) في كل متتابعة مما يأتي اكتب الخمسة حدود الأولى ثم مثلها بيانيًا في المستوى الإحداثي :

(أ) $\{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ حيث $أ_ن = ٢ن + ١$.

(ب) $\{أ_ن\}_{ن=١}^{٨}$ حيث $أ_ن = \frac{١}{٢}$.

(جـ) $\{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ حيث $أ_ن = (-١)^ن \times ن$.

(د) $\{أ_ن\}_{ن=١}^{١٠}$ حيث $أ_ن = \frac{١}{ن}$.

(هـ) $\{أ_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ حيث $أ_ن = \frac{١}{ن(ن+١)}$.

(٢) فيما يأتي استنتج الحد النوني لكل متتابعة :

(أ) $(١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، ------)$.

(ب) $(\frac{١}{٣} ، -\frac{١}{٩} ، \frac{١}{٢٧} ، -\frac{١}{٨١} ، --------)$.

(جـ) $(\frac{١}{٢} ، ٠ ، -\frac{١}{٢} ، -١ --------)$.

(د) $(أ ، أر ، أر^٢ ، أر^٣ ، -------)$ حيث أ ، ر عددان ثابتان .

(هـ) $(أ ، أ + ر ، أ + ٢ر ، أ + ٣ر ، -------)$ حيث أ ، ر عددان ثابتان .

٢ ـ ٢ المتتابعات الحسابية والهندسية :

(١) المتتابعة الحسابية

لو نظرنا إلى المتتابعة ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ------ نلاحظ أن $ا_٢ - ا_١ = ٣ = ا_٣ - ا_٢ = ا_٤ - ا_٣$ وهلم جرًا وبشكل عام فإن : $ا_{ن+١} - ا_ن = ٣$ لجميع قيم ن وهذا يعني أن : $ا_{ن+١} = ا_ن + ٣$ لجميع قيم ن . وفي الواقع يوجد كثير من المتتابعات المنتهية وغير المنتهية التي يحقق فيها الحد النوني علاقة حسابية من النوع أعلاه وتندرج كلها في التعريف التالي :

تعريف (٢ ـ ٣)

المتتابعة $\{ح_ن\}$ المنتهية أو غير المنتهية تسمى متتابعة حسابية إذا وجدنا عددًا ثابتًا ء بحيث إن $ح_{ن+١} - ح_ن = ء$ لجميع قيم ن . ونسمي الفرق الثابت ء في هذه الحالة أساس المتتابعة الحسابية $\{ح_ن\}$.

ملحوظة (٢ – ٣) :

إذا كانت $\{ح_ن\}$ متتابعة حسابية أساسها ء وحدها الأول $ح_١ = ا$ فنلاحظ من التعريف أن :

$ح_٢ - ح_١ = ء$ أي أن $ح_٢ = ح_١ + ء$ وبالمثل نجد أن : $ح_٣ = ح_٢ + ء = ا + ٢ء$ ، $ح_٤ = ا + ٣ء$ ، ---- $ح_ن = ا + (ن - ١) ء$ أي أن المتتابعة الحسابية يعطى حدها النوني بالصيغة الجبرية :

$ح_ن = ا + (ن - ١) ء$ -------- (٢ـ١)

حيث ا هو الحد الأول في المتتابعة الحسابية و ء هو أساسها الحسابي .

مثال (٢-٣)

بين أيًا من المتتابعات التالية حسابية :

(أ) ١ ، ٢ ، ٣ ، ---- ، ٢٠ .

(ب) ٣ ، -١ ، -٥ ، -٩ ---- .

(جـ) ٢ ، ٦ ، ١١ ، ١٨ ، ---- .

(د) $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، ١ .

الحــل :

(أ) بملاحظة أن :

$ح_٢ - ح_١ = ١ = ح_٣ - ح_٢ = $ ------

$= ح_{٢٠} - ح_{١٩}$

ينتج أن هذه المتتابعة هي متتابعة حسابية أساسها الحسابي هو ء = ١ وحدها الأول هو $ح_١ = ١$

وعدد حدودها ٢٠

(ب) نلاحظ أن :

$ح_٢ - ح_١ = - ١ - ٣ = - ٤ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ =$ ------ $= ح_{ن+١} - ح_ن$ ينتج أن

هذه المتتابعة حسابية حدها الأول هو ٣ وأساسها الحسابي هو - ٤ .

(جـ) إن $ح_٢ - ح_١ = ٤$ بينما $ح_٣ - ح_٢ = ٥$ لذلك فإن $ح_٢ - ح_١ \neq ح_٣ - ح_٢$ والمتتابعة ليست حسابية .

(د) $ح_٢ - ح_١ = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦} = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ح_٥ - ح_٤$. لذلك فإن المتتابعة حسابية حدها الأول $\frac{١}{٣}$ وأساسها $\frac{١}{٦}$ وعدد حدودها خمسة .

مثال (٢-٤)

(أ) أوجد $ح_{٢٠}$ في المتتابعة الحسابية :

٢ ، -٢ ، -٦ ، ----- .

(ب) إذا كان لدينا متتابعة حسابية $\{ح_ن\}$ فيها $ح_٣ = ٥$ ، $ح_{١١} = ٢٩$ فأوجد $ح_{٣٠}$.

الحــل :

(أ) إنَّ $ء = ح_٢ - ح_١ = -٤$ ، $ا = ح_١ = ٢$.

إذًا من الصيغة (٢ ـ ١) فإن :

$ح_{٢٠} = ا + (٢٠ - ١) ء = ٢ + (١٩ \times -٤) = -٧٤$.

(ب) باستخدام الصيغة (٢ ـ ١) نحصل على :

$ا + ٢ء = ح_٣ = ٥$ ، $ا + ١٠ء = ح_{١١} = ٢٩$.

فيكون لدينا المعادلتان :

$ا + ٢ء = ٥$

$ا + ١٠ء = ٢٩$

في المجهولين ا ، ء بحل المعادلتين ينتج لدينا $ء = ٣$ ، $ا = -١$. وبالتالي فإنّ :

$ح_{٣٠} = ا + ٢٩ء = ٨٦$.

الأوساط الحسابية :

في كثير من الأحيان نحتاج لمعـرفة المتتابعة الحسابيـة التي تبدأ بعدد معين ا وتنتهي بعدد معين آخر ب ويعرف عدد حدودها مقدمًا .

تعريف (٢ ـ ٤)

الأوساط الحسابية بين عددين ا ، ب هي الحدود الأخرى للمتتابعة الحسابية التي حدها الأول ا وحدها الأخير ب والتي يعرف عدد حدودها مقدمًا .

مثال (٢-٥)

أوجد الخمسة أوساط الحسابية بين العددين − ١٢ ، ١١٤ .

الحـــل :

إن هذه الأوساط الحسابية هي الحدود الأخرى للمتتابعة الحسابية التي حدها الأول − ١٢ والأخير ١١٤ . أي أن عدد حدودها هو ٧ وبالتالي فإن حدها الأخير هو

$ح_٧$ = ا + ٦ ء أي أن ١١٤ = − ١٢ + ٦ ء

ومن ذلك ينتج أن ء = $\frac{١٢٦}{٦}$ = ٢١ وبالتالي فإن الأوساط الحسابية المطلوبة هي على التوالي :

$ح_٢$ = −١٢ + ٢١ = ٩ ، $ح_٣$ = $ح_٢$ + ٢١ = ٣٠ ، $ح_٤$ = $ح_٣$ + ٢١ = ٥١ ، $ح_٥$ = $ح_٤$ + ٢١= ٧٢ ، $ح_٦$ = $ح_٥$ + ٢١ = ٩٣ .

(٢) المتتابعة الهندسية :

هناك أيضًا نوع آخر من المتتابعات له نمط مميّز، ويختلف عن المتتابعات الحسابية ، فإذا تأملنا في المتتابعة ٣ ، − ٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، ٤٨ ، ---------- نجد أنها ليست حسابية حيث

$ا_٢ - ا_١ = -٩$ بينما $ا_٣ - ا_٢ = ١٨$ ولكن نلاحظ أن

$\frac{ا_٢}{ا_١} = -٢ = \frac{ا_٣}{ا_٢} = \frac{ا_٤}{ا_٣} = ------$ أي بشكل عام فإن $\frac{ا_{ن+١}}{ا_ن} = -٢$ لجميع قيم ن أو بعبارة

أخرى $ا_{ن+١} = -٢ ا_ن$. يمكننا الآن إعطاء التعريف التالي :

تعريف (٢ ـ ٥)

إذا كانت $\{ح_ن\}$ متتابعة و ر عدد ثابت بحيث إن $ح_{ن+١} = ر . ح_ن$ لجميع قيم ن فإننا نسمي هذه المتتابعة متتابعة هندسية أساسها ر .

ملحوظة (٢ – ٤) :

إذا كانت $\{ح_ن\}$ متتابعة هندسية أساسها ر وحدها الأول هو $ح_١ = ا$ فمن التعريف نلاحظ أنّ :

$ح_٢ = ح_١ ر = ا ر$ ، $ح_٣ = ح_٢ ر = ا ر^٢$ ، $ح_٤ = ح_٣ ر = ا ر^٣$ ، ------، $ح_ن = ح_{ن-١} . ر =$

$ا ر^{ن-١}$. أي أن أي متتابعة هندسية يعطى حدها النوني بالصيغة الجبرية :

$$ح_ن = ا ر^{ن-١} \quad ------- \quad (٢ـ٢)$$

حيث ا هو حدها الأول و ر أساسها .

مثال (٢–٦)

بيِّن أيًّا مما يلي متتابعة هندسية :

(أ) ٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ----

(ب) ٧ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٣٦ ، -----

(جـ) ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، -----

(د) ٤ ، -٣ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $-\frac{٢٧}{١٦}$.

الحـل :

(أ) لدينا : $ح_1 = ٤$ ، $ح_2 = ١٢ = ٤ \times ٣$.

$ح_3 = ٣٦ = ٤ \times ٣^2$ ، $ح_4 = ١٠٨ = ٤ \times ٣^3$ ، ------ ، $ح_ن = ٤ \times ٣^{ن-1}$. أي أنها

متتابعة هندسية أساسها ٣ وهي غير منتهية .

(ب) حيث إن $ح_2 = ٢١ = ٣ ح_1$ بينما $ح_3 = ٢٤ \neq ٣ ح_2$ فإن هذه المتتابعة ليست هندسية .

(جـ) $ح_2 = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} ح_1$ ، $ح_3 = \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} ح_2$ ، $ح_4 = \frac{١}{٨} = \frac{١}{٢} ح_3$.

وعمومًا $ح_{ن+1} = \frac{١}{٢} ح_ن$ لذلك فهذه المتتابعة هندسية أساسها الهندسي هو $\frac{١}{٢}$ وهي غير

منتهية .

(د) إنَّ $\frac{ح_2}{ح_1} = - \frac{٣}{٤} = \frac{ح_3}{ح_2} = \frac{ح_4}{ح_3}$. لذلك

فهذه المتتابعة هندسية أساسها الهندسي $- \frac{٣}{٤}$ وعدد حدودها ٤ .

مثال (٢-٧)

(أ) أوجد الحد السابع في المتتابعة الهندسية : ٦ ، ٢ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ------ .

(ب) إذا كانت $\{ح_ن\}$ متتابعة هندسية فيها : $ح_4 = ٣٢$ ، $ح_7 = -٢٥٦$ فأوجد $ح_5$.

الحـل :

(أ) $ا = ح_1 = ٦$ ، $ر = \frac{ح_2}{ح_1} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ لذلك :

$ح_7 = ا ر^6 = ٦ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^6 = \frac{٦}{٧٢٩} = \frac{٢}{٢٤٣}$.

(ب) $\frac{ح_7}{ح_4} = - \frac{٢٥٦}{٣٢} = \frac{ا ر^6}{ا ر^3}$ أي أن $ر^3 = -٨$.

ومنه $ر = -٢$ وبالتالي $ا = \frac{ح_4}{ر^3} = \frac{٣٢}{-٨} = -٤$.

لذلك $ح_٥ = ا ر^٤ = - ٤ \times (-٢)^٤ = - ٤ \times ١٦ = - ٦٤$.

الأوساط الهندسية :

يمكننا أيضًا تعريف الأوساط الهندسية بطريقة مشابهة لتعريف الأوساط الحسابية .

تعريف (٢ ـ ٦)

الأوساط الهندسية بين عددين ا ، ب هي الحدود الأخرى للمتتابعة الهندسية التي حدها الأول ا وحدها الأخير ب وعدد حدودها معين مسبقًا .

مثال (٢-٨)

أدخل وسطين هندسيين بين العددين $- ٧$ ، $\frac{١٨٩}{٨}$

الحـــل :

إن إدخال وسطين هندسيين يعني أن عدد حدود المتتابعة الهندسية هو ٤ وبالتالي فإن :

$ا = ح_١ = - ٧$ ، $ح_٤ = ا ر^٣ = \frac{١٨٩}{٨}$ أي أن $ر^٣ = \frac{١٨٩}{١٨} = \frac{١٨٩}{-٥٦} = \frac{٢٧}{-٨}$ ومنه $ر = \frac{٣}{-٢}$.

فيكون الوسطان الهندسيان المطلوبان هما :

$ح_٢ = ا ر = \frac{٢١}{٢}$ ، $ح_٣ = ا ر^٢ = - \frac{٦٣}{٤}$.

تدريب (٢-٢)

(أ) أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين $- ٢$ ، ٢٢ .

(ب) أدخل أربعة أوساط هندسية بين $- ٦٤$ ، $\frac{٢٤٣}{١٦}$.

تماريـن (٢ - ٢)

(١) حدد أيًا مما يلي متتابعة حسابية وأيا منها متتابعة هندسية والأساس لكل نوع :

(أ) ١، ٠ ، -١ ، ----- .

(ب) $\frac{١}{٥^٤}$ ، $\frac{١}{٥^٣}$ ، $\frac{١}{٥^٢}$ ، ------ .

(حـ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، . ، -------- .

(د) ٢ ب - ٣ ، ٢ ب - ١ ، ٢ ب + ١ ، ---- حيث ب عدد ثابت .

(هـ) $\frac{ا}{ب}$ ، $\frac{ا^٢}{ب^٣}$ ، $\frac{ا^٣}{ب^٥}$ ، ---- حيث ا ، ب عددان ثابتان .

(٢) باستخدام مفهوم المتتابعة الحسابية أوجد عدد المضاعفات للعدد ٦ بين العددين ١١ ، ١٠٠٠.

(٣) أدخل الأوساط المطلوبة فيما يلي :

(أ) أربعة أوساط حسابية بين ١ ، ٢١ .

(ب) وسطًا حسابيا بين ٨٣ ، - ٧٣ .

(حـ) وسطين هندسيين بين ٩ ، - ٢٤٣ .

(د) وسطًا هندسيًا بين ٦ ، ١٥٠ .

(٤) متتابعة حسابية حدها الخامس - ١٠ ، وحدها الثامن - ١٩ ، أوجد حدها الخامس عشر .

(٥) متتابعة حسابية حدها الثامن ينقص عن حدها الثالث بمقدار ٢٠ والحد الثالث ضعف الثامن . فأوجد الحد الثاني عشر فيها .

(٦) ما هو الحد السابع في متتابعة هندسية حدها الثاني ـ ٦ ، وحدها الخامس ١٦٢؟ .

(٧) أوجد المتتابعة الهندسية التي يزيد فيها الحد الثالث عن الثاني بمقدار ٦ والحد الرابع يزيد عن الحد الثالث بمقدار ٤ .

(٨) قفز رجل مظلي من فوق طائرة بشكل رأسي نحو الأرض فإذا قطع مسافة ١٦ قدمًا في الثانية الأولى وإذا كانت مسافة النزول تزيد بمعدل ٣٢ قدمًا كل ثانية فما هي المسافة التي ينزلها المظلي بعد ٢٠ ثانية؟

(٩) بدأ أحد متسلقي الجبال تسلق جبال الهيملايا واستطاع أن يصعد ١٠٠٠ قدم في خلال ساعة واحدة فإذا كان مقدار صعوده الجبل يقل كل ساعة بمعدل ٨٠ قدمًا ففي أي ساعة بدءًا من صعوده يتوقف المتسلق تمامًا عن الصعود .

(١٠) إذا كانت قيمة قطعة أرض هي ١٢٠,٠٠٠ ريال وبعد ثلاث سنوات أصبحت ٤٨٠,٠٠٠ ريال بافتراض أن قيمة الأرض على شكل متتابعة هندسية ما هي القيمة المتوقعة للأرض بعد خمس سنوات؟

٢ ـ ١ المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية :

تعريف (٢ ـ ٧)

إذا كانت {ح ن} متتابعة حسابية منتهية أو متتابعة هندسية منتهية فإن المجموع :

حـ م = ح ١ + ح ٢ + ح ٣ + ----- + ح م يسمّى متسلسلة حسابية منتهية أو متسلسلة هندسية منتهية على الترتيب وفي كلتا الحالتين نقول إن عدد الحدود هو م .

ملحوظة (٢ – ٥) :

بإمكاننا اختصار كتابة المتسلسلة المنتهية (سواء أكانت حسابية أم هندسية) :

حـ م = ح ١ + ح ٢ + ---+ ح م بكتابتها على الصورة : حـ م = $\sum_{ن=١}^{م}$ ح ن حيث ح ن هو الحد النوني للمتتابعة .

مثال (٢–٩)

بيّن نوع كل متسلسلة فيما يلي واكتبها بالصورة المختصرة :

(أ) حـ م = ٤ + ٩ + ١٤ + ---- + (٥م – ١) .

(ب) حـ م = ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + ------ + (٢ × ($\frac{١}{٢}$)$^{م-١}$) .

الحـل :

(أ) الحد النوني للمتتابعة هو ح ن = ٥ ن – ١ أي أن ح ن = (– ١) + ٥ ن وهي متتابعة حسابية وعليه فإن حـ م متسلسلة حسابية وصورتها المختصرة هي حـ م = $\sum_{ن=١}^{م}$ (٥ ن – ١) .

(ب) الحد النوني هو ح ن = ٢ × ($\frac{١}{٢}$)$^{ن-١}$ أي أنَّ المتتابعة هندسية وبالتالي فإن حـ م متسلسلة هندسية وصورتها المختصرة هي حـ م = $\sum_{ن=١}^{م}$ ٢ × ($\frac{١}{٢}$)$^{ن-١}$.

مثال (٢–١٠)

اكتب المتسلسلة حـ م = $\sum_{ن=١}^{م}$ ٢ × ٣$^{ن-١}$ بصورة مفصّلة .

الحـــل :

نعوض على التوالي عن ن بالقيمة من ١ إلى ٥ فنحصل على $حـ_م = ٢ \times ١ + ٢ \times ٣ + ٢ \times ٩$
$+ ٢ \times ٢٧ + ٢ \times ٨١ = ٢ + ٦ + ١٨ + ٥٤ + ١٦٢$.

نظرية (٢ ـ ١):

لتكن $حـ_م = \sum_{ن=١}^{م} ح_ن$ حيث $\{ح_ن\}$ متتابعة حسابية حدها الأول ا وأساسها ى . فإن مجموعها :

$$حـ_م = \frac{م}{٢} [٢ا + (م - ١) ى] = \frac{م}{٢} (ح_١ + ح_م) \qquad (٢ ـ ٣)$$

البرهـان :

$$حـ_م = \sum_{ن=١}^{م} ح_ن = ح_١ + ح_٢ + ---- + ح_{م-١} + ح_م$$

أي أن $حـ_م = ا + (ا + ى) + ---- + (ا + (م - ٢) ى) + (ا + (م - ١) ى)$

أيضًا $حـ_م = (ا + (م - ١) ى) + (ا + (م - ٢) ى) + ---- + (ا + ى) + ا$

وبجمع المتساويتين السابقتين طرفًا بطرف نحصل على :

$$٢حـ_م = (٢ا + (م - ١) ى) + (٢ا + (م - ١) ى) + ------$$
$$---- + (٢ا + (م - ١) ى) + (٢ا + (م - ١) ى)$$

أي أن : $٢حـ_م = م \times [٢ا + (م - ١) ى]$ ومنه

$$حـ_م = \frac{م}{٢} [٢ا + (م - ١) ى] = \frac{م}{٢} [ا + ا + (م - ١) ى] = \frac{م}{٢} (ح_١ + ح_م) .$$

مثال (٦-١١)

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية : $حـ_{١٥} = \sum_{ن=١}^{١٥} ح_ن$ علمًا بأن $ح_٦ = -٤$ ، $ح_{١٣} = ١٠$.

الحـــل :

$ح_٦ = ا + ٥ ى = -٤$ ، $ح_{١٣} = ا + ١٢ ى = ١٠$.

أي أن : $(ا + ٥ى) - (ا + ١٢ ى) = -٤ - ١٠$ ومنه $-٧ ى = -١٤$ فنجد أنَّ $ى = ٢$

وبالتعويض عن قيمة ى في $ح_٦$ ينتج أنَّ :

ا = − ٤ − ١٠ = − ١٤ . لذلك لدينا :

$$ح_{١٥} = \frac{م}{٢} [٢ ا + (م − ١) ء] = \frac{١٥}{٢} [− ٢٨ + ٢٨] = صفرًا .$$

مثال (٢-١٢)

إذا كانت $ح_م = \sum_{ن=١}^{م} ح_ن$ متسلسلة حسابية فيها $ح_١ = ١٣$، $ح_م = −٥$ ومجموعها ٤٠ فأوجد عدد الحدود م.

الحـــل :

حيث إن $ح_م = \frac{م}{٢}(ح_١ + ح_م)$ يصبح لـديـنـا : $٤٠ = \frac{م}{٢}(١٣ − ٥) = \frac{٨م}{٢} = ٤م$ ومنـه

عدد الحدود $م = \frac{٤٠}{٤} = ١٠$.

نظرية (٢ ـ ٢)

إذا كانت $\{ح_ن\}_{ن=١}^{م}$ متتابعة هندسية حدّها الأول ا وأساسها ر فإن مجموعها هو:

$$ح_م = \sum_{ن=١}^{م} ح_ن = ا\left(\frac{ر^م − ١}{ر − ١}\right) \text{ عندما } ر \neq ١ \quad (٢ ـ ٤)$$

وفي حالة ر = ١ فإن: $ح_م = م . ا$.

البـرهـان :

$ح_م = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \text{------} + ح_م$

$= ا + ا ر + ا ر^٢ + \text{-----} + ا ر^{م−١}$

وعليه فإن: $ر . ح_م = ا ر + ا ر^٢ + ا ر^٣ + \text{----} + ا ر^م$

وبطرح المتساوية الأولى من الثانية ينتج أن : $ر . ح_م − ح_م = ا ر^م − ا$

أي: $ح_م (ر − ١) = ا (ر^م − ١)$ وبالتالي: $ح_م = \frac{ا (ر^م − ١)}{ر − ١}$ في حالة ر ≠ ١ ؛ أما عندما

ر = ١ فإن $ح_م = ا + ا + \text{----} + ا = م . ا$.

تدريب (٢-٣)

أثبت النظرية السابقة بالاستقراء الرياضي .

مثال (٢-١٣)

احسب المجموع $\text{حـ}_{١٠} = \sum_{\text{ن}=١}^{١٠} ٢^{\text{ن}}$.

الحـــل :

$\text{ح}_{\text{ن}} = ٢^{\text{ن}}$ ومنه $\text{ا} = \text{ح}_١ = ٢$ ، $\text{ح}_٢ = ٤ = \text{ار}$ لذلك $\text{ر} = \frac{\text{ح}_٢}{\text{ا}} = \frac{٤}{٢} = ٢$ أيضًا $\text{م} = ١٠$.

فينتج أن $\text{حـ}_{١٠} = \frac{\text{ا}\left(\text{ر}^{١٠} - ١\right)}{\text{ر} - ١} = ٢ \left(\frac{٢^{١٠} - ١}{١}\right)$ أي أن $\text{حـ}_{١٠} = ٢ \times ١٠٢٣ = ٢٠٤٦$.

مثال (٢-١٤)

إذا كان مجموع المتسلسلة الهندسية $\text{حـ}_{\text{م}} = \sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} ٣^{\text{ن}-٣}$ هو $\frac{٣٦٤}{٩}$ فأوجد عدد الحدود م .

الحـــل :

لدينا $\text{ا} = \text{ح}_١ = ٣^{١-٣} = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$، $\text{ح}_٢ = ٣^{-١} = \frac{١}{٣}$ ومنه $\text{ر} = \frac{\text{ح}_٢}{\text{ا}} = \frac{١}{٣} \div \frac{١}{٩} = ٣$.

الآن $\frac{٣٦٤}{٩} = \text{حـ}_{\text{م}} = \text{ا}\frac{\left(\text{ر}^{\text{م}} - ١\right)}{\text{ر} - ١} = \frac{\frac{١}{٩}\left(٣^{\text{م}} - ١\right)}{٣ - ١}$ أي أن $\frac{٣٦٤}{٩} = \frac{٣^{\text{م}} - ١}{١٨}$ ومنه .

$٣^{\text{م}} - ١ = ٣٦٤ \times ٢ = ٧٢٨$ وينتج أن : $٣^{\text{م}} = ٧٢٩ = ٣^{٦}$ وهذا يقتضي أن $\text{م} = ٦$ أي أن

عدد حدود المتسلسلة هو ٦ .

تدريب (٢-٤)

(أ) إذا كانت $\text{حـ}_{١٦}$ متسلسلة حسابية عدد حدودها ١٦ وحدها الأول - ٣ ومجموعها ٧ فما هو أساسها .

(ب) إذا كانت $\text{حـ}_{\text{ن}}$ متسلسلة هندسية مجموعها ١٢١ وأساسها ٣ فأوجد حدها الأول .

تمارين (٢ – ٣)

أوجد مجموع المتسلسلة المعطاة في كل من التمارين من (١) إلى (٦):

(١) $ح_{٤} = \sum_{ن=١}^{٤} (٢ن + ١)$.　　　(٢) $ح_{٥} = \sum_{ن=١}^{٥} (٢ن - ٥)$.

(٣) $ح_{٢٠} = \sum_{ن=١}^{٢٠} (٣ن + ١)$.　　　(٤) $ح_{٨} = \sum_{ر=١}^{٨} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر}$.

(٥) $ح_{١٠} = \sum_{هـ=١}^{١٠} \left(\frac{هـ}{٢}\right)^{-١}$　　　(٦) $ح_{٧} = \sum_{م=١}^{٧} ٣^{م-٢}$.

(٧) أوجد مجموع المتتابعة الحسابية $ح_{١٩} = \sum_{ن=١}^{١٩} ح_{ن}$ علمًا بأن $ح_{١٢} = ١٣٠$ ، $ح_{١٩} = ١١٦$.

(٨) أوجد مجموع المتتابعة الهندسية $ح_{٧} = \sum_{ن=١}^{٧} ح_{ن}$ علمًا بأن $ح_{٣} = \frac{١}{٣}$ ، $ح_{٦} = ٩$.

(٩) إذا كان مجموع المتسلسلة الحسابية $ح_{م} = \sum_{ن=١}^{م} (٣ن + ٥)$ هو ٢١٥ فما هو عدد الحدود م .

(١٠) أوجد عدد حدود المتسلسلة الهندسية $ح_{م} = \sum_{ن=١}^{م} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} = \frac{١٩٥}{١٦}$.

(١١) متتابعة هندسية حدها الأول ٣ والأخير ٤٨ فإذا كان كل حد فيها ضعف الحد السابق له فأوجد مجموعها .

(١٢) تعهد مقاول في بناء مشروع بأنه في حالة تأخره في تسليم المشروع فإنه يدفع غرامة في اليوم الأول ١٠٠٠ ريال، أما الأيام الأخرى فإنه يدفع في كل يوم غرامة تزيد ٥٠ ريالاً عن اليوم السابق له، فإذا كان مجموع الغرامات التي دفعها المقاول هو ١٥,٣٠٠ ريال فكم عدد أيام التأخير .

(١٣) إذا كانت مبيعات إحدى الشركات في السنة المنصرمة ١٠ ملايين ريال وكانت الزيادة المتوقعة في كل سنة هي ٥٪ فبكم يتوقع أن تبيع الشركة في السنة الخامسة؟ .

وما هو مجموع المبيعات خلال ٨ سنوات؟ .

٢ - ٤ نهايـة المتتابعـة غيـر المنتهيـة :

تنبع أهمية المتتابعات غير المنتهية من دراسة سلوك الحد النوني $ا_ن$ عندما تأخذ ن قيمًا كبيرة جدًا ففي كثير من الأحيان نجد أن قيمة $ا_ن$ تقترب من عدد معين ل كلّما زادت ن بلا حدود .

مثال (٢-١٥)

ادرس سلوك الحد النوني في المتتابعة غير المنتهية $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = ٣ + \frac{(-١)^ن}{٢^ن}$

الحـــل :

نلاحظ أولاً أن $|ا_ن - ٣| = \frac{١}{٢^ن}$ وبملاحظة أن المقدار $\frac{١}{٢^ن}$ يقترب من الصفر أكثر فأكثر كلما زادت ن بلا حدود، فعلى سبيل المثال عندما ن = ٦٤ فإن $\frac{١}{٢^{٦٤}} \simeq ٥٤ \times ١٠^{-٢١}$ وهي قيمة قريبة جدًا من الصفر. لذلك فإن قيمة $|ا_ن - ٣|$ تقترب من الصفر كلما زادت ن بلا حدود .

ويمكن تمثيل ذلك بيانيًا بالشكل التالي :

شكل (٢ـ٤)

يُعبَّر رياضيًّا عن اقتراب $ا_ن$ بشكل متواصل من العدد ٣ بقولنا «إن نهاية المتتابعة $\{ا_ن\}$ عندما تؤول ن إلى ما لا نهاية هي ٣ » ونكتب ذلك رمزيًا بالصورة $\lim_{ن \to \infty} ا_ن = ٣$.

تعريف (٢ـ٨) :

إذا كانت $\{ا_ن\}$ متتابعـة غير منتهية وكان ل عددًا حقيقيًـا بحيث إن المقدار $|ا_ن - ل|$ يساوي الصفـر أو يقترب أكثر فأكثـر من الصفر كلما زادت ن بلا حـدود عندئذ نقـول إن المتتابعة $\{ا_ن\}$ متقاربة ولها النهاية ل عندما تؤول ن إلى ما لا نهاية ونكتب : $\lim_{ن \to \infty} ا_ن = ل$.

ملحوظة (٢ - ٦)

(١) يمكننا إعطاء صيغة أخرى مكافئة للتعريف السابق وهي : إن المتتابعة {$ا_ن$} لها النهاية ل إذا كان الحد النوني يقترب من القيمة ل بلا حدود كلما زادت قيمة ن بلا حدود .

(٢) من التعريف (٢ ـ ٨) ينتج أن المتتابعة إذا كانت متقاربة فإن نهايتها وحيدة .

تعريف (٢ ـ ٩) :

إذا كانت {$ب_ن$} متتابعة غير منتهية وغير متقاربة ، فإننا نقول إنها متباعدة وليس لها نهاية .

مثال (٢-١٦)

ناقش أيًّا من المتتابعات غير المنتهية متقاربة وأوجد نهاية المتقاربة منها :

(أ) {$ا_ن$} حيث $ا_ن = ٣$ لجميع قيم ن .

(ب) {$ا_ن$} حيث $ا_ن = (-١)^ن$.

(حـ) {$ا_ن$} حيث $ا_ن = \sqrt{ن}$.

الحـــل :

(أ) بملاحظة أن $|ا_ن - ٣| = |٣ - ٣| =$ صفرًا لجميع قيم ن ، فهذا يعني من تعريف (٢ ـ ٨) أن {$ا_ن$} متقاربة ونهايتها العدد ٣ .

(ب) إن حدود المتتابعة المعطاة هي ـ ١ ، ١ ، ـ١ ، ١ ، ---- أي أنها تأخذ القيمتين ١ ، -١ بالتناوب ولا تثبت على أي منهما مهما زادت ن وبالتالي فهي متباعدة ؛ لأنها لا تتقارب إلى قيمة وحيدة .

(حـ) حيث إن $ا_ن = \sqrt{ن}$ فنلاحظ أنه كلما زادت قيمة ن بلا حدود فإن قيمة $\sqrt{ن}$ تزداد بلا

حدود، وبالتالي فلا يمكن أن تقترب من عدد محدود وعلى ذلك فإن هذه المتتابعة متباعدة .

يمكننا تعميم الفقرة (أ) من المثال السابق في النظرية التالية :

نظرية (٢ ـ ٣):

المتتابعة $\{ا_ن\}$ والتي فيها $ا_ن = حـ$ حيث حـ ثابت لجميع قيم ن متقاربة و $\underset{ن\leftarrow\infty}{نها} ا_ن = حـ$.

تدريب (٢-٥)

أثبت النظرية (٢ ـ ٣) .

أيضًا لدينا النظرية المهمة التالية :

نظرية (٢ ـ ٤):

لتكن $\{ا_ن\}$ ، $\{ب_ن\}$ متتابعتين متقاربتين حيث : $\underset{ن\leftarrow\infty}{نها} ا_ن = ل$ ، $\underset{ن\leftarrow\infty}{نها} ب_ن = ك$ عندئذ :

(أ) المتتابعتان $\{ا_ن + ب_ن\}$ ، $\{ا_ن - ب_ن\}$ متقاربتان وتكون $\underset{ن\leftarrow\infty}{نها} (ا_ن \pm ب_ن) = ل \pm ك$.

(ب) المتتابعة $\{ا_ن ب_ن\}$ متقاربة وتكون $\underset{ن\leftarrow\infty}{نها} ا_ن ب_ن = ل \cdot ك$.

(حـ) إذا كانت $ك \neq$ صفرًا و $ب_ن \neq$ صفرًا لجميع قيم ن عـنـدئذ فإن المتتابعـة $\left\{\frac{ا_ن}{ب_ن}\right\}$ متقاربة وتكون $\underset{ن\leftarrow\infty}{نها} \frac{ا_ن}{ب_ن} = \frac{ل}{ك}$.

تدريب (٢-٦)

لتكن $\{ا_ن\}$ متتابعة متقـاربة نهايتها ل وليكن حـ ثابتـا حقيقيًا باستخـدام النظريتين (٢ -٣)، (٢-٤) أثبت ما يلي :

(١) المتتابعة $\{حـ \pm ا_ن\}$ متقاربة ونهايتها $حـ \pm ل$.

(٢) المتتابعة $\{حـ ا_ن\}$ متقاربة ونهايتها $حـ . ل$.

(٣) نفرض $أ_ن \neq$ صفرًا لجميع قيم ن، ل $\neq$ صفر فإن المتتابعة $\{\frac{حـ}{أ_ن}\}$ متقاربة ونهايتها $\frac{حـ}{ل}$.

(٤) المتتابعة $\{\frac{حـ}{ن}\}$ متقاربة ونهايتها صفر.

مثال (٢-١٧)

أثبت أنه لأي عدد طبيعي م ولأي ثابت حقيقي حـ تكون المتتابعة $\{\frac{حـ}{ن^م}\}$ متقاربة إلى الصفر .

الحـــل :

سنثبت ذلك بالاستقراء الرياضي على قيم م .

فنلاحظ عند م = ١ أن المتتابعة هي $\{\frac{حـ}{ن}\}$ ومن التدريب السابق فإنها متقاربة إلى الصفر

الآن نفرض صحة ذلك عند م = ر أي نفرض أن المتتابعة $\{\frac{حـ}{ن^ر}\}$ متقاربة إلى الصفر وسنثبت

صحة ذلك عند م = ر + ١ أي سنثبت أن المتتابعة $\{\frac{حـ}{ن^{ر+١}}\}$ متقاربة إلى الصفر باستخدام

النظرية (٢-٤) فقرة (ب) نجد أن :

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{حـ}{ن^{ر+١}} = \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{١}{ن} \cdot \frac{حـ}{ن^ر}\right) = \left[\lim_{ن \to \infty}\left(\frac{١}{ن}\right)\right]\left[\lim_{ن \to \infty}\left(\frac{حـ}{ن^ر}\right)\right] = ٠ \times ٠ = \text{صفرًا}$$.

والبرهان قد اكتمل بالاستقراء الرياضي .

مثال (٢-١٨)

ادرس تقارب المتتابعة $\{أ_ن\}$ حيث $أ_ن = \frac{٣ن^٢ + ٢ن - ٣}{٧ن^٢ + ٥ن - ٤}$.

الحـــل :

نلاحظ أولاً أنَّ :

$$أ_ن = \frac{ن^٢\left(٣ + \frac{٢}{ن} - \frac{٣}{ن^٢}\right)}{ن^٢\left(٧ + \frac{٥}{ن} - \frac{٤}{ن^٢}\right)} = \frac{٣ + \frac{٢}{ن} - \frac{٣}{ن^٢}}{٧ + \frac{٥}{ن} - \frac{٤}{ن^٢}}$$

وبجعل $ب_ن = ٣ + \frac{٢}{ن} - \frac{٣}{ن^٢}$ ، $حـ_ن = ٧ + \frac{٥}{ن} - \frac{٤}{ن^٢}$ نحصل على المتتابعتين $\{ب_ن\}$ ، $\{حـ_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{ب_ن}{حـ_ن}$ ولكن كلا من $\{ب_ن\}$، $\{حـ_ن\}$ متقاربة لأنه من النظريتين (٢ ـ ٣) ، (٢ـ٤) والمثال السابق فإنَّ :

$\lim_{ن \to \infty} ب_ن = \lim_{ن \to \infty} ٣ + \lim_{ن \to \infty} \frac{٢}{ن} - \lim_{ن \to \infty} \frac{٣}{ن^٢} = ٣ + ٠ - ٠ = ٣$ وكذلك

$\lim_{ن \to \infty} حـ_ن = \lim_{ن \to \infty} ٧ + \lim_{ن \to \infty} \frac{٥}{ن} - \lim_{ن \to \infty} \frac{٤}{ن^٢} = ٧$ وينتج لدينا من النظرية (٢ ـ ٤) فقرة (جـ) أن المتتابعة $\{ا_ن\}$ متقاربة وتكون :

$$\lim_{ن \to \infty} ا_ن = \frac{\lim_{ن \to \infty} ب_ن}{\lim_{ن \to \infty} حـ_ن} = \frac{٣}{٧}$$

أخيرًا نورد النظرية المهمة التالية :

نظرية (٢ ـ ٥)

لتكن ا ، ب ، حـ ، ء ، ل أعدادًا حقيقية موجبة بحيث $حـ > ١$ ، $ء < ١$ عندئذٍ .

(١) لأي عدد طبيعي $م$ فإن المتتابعة $\{\frac{ا}{ن^م}\}$ متقاربة إلى الصفر .

(٢) المتتابعة $\{\frac{ا}{حـ^ن}\}$ متقاربة إلى الصفر بينما المتتابعة $\{ا حـ^ن\}$ متباعدة إلى ما لا نهاية .

(٣) إذا كان $ب > ل$. فإن المتتابعة $\{(\frac{ل}{ب})^ن\}$ متقاربة إلى الصفر بينما المتتابعة $\{(\frac{ب}{ل})^ن\}$ متباعدة إلى ما لا نهاية .

(٤) المتتابعة $\{ا ء^ن\}$ متقاربة إلى الصفر أما المتتابعة $\{\frac{ا}{ء^ن}\}$ فهي متباعدة إلى ما لا نهاية .

البرهان :

لقد أثبتنا (١) في المثال (٢ ـ ١٧) . ولإثبات (٢) نلاحظ أن : $حـ > ١ \Leftarrow$ يوجد عدد $ر > ٠$

بحيث $ح = ١ + ر \Leftarrow ح^ن = (١ + ر)^ن \Leftarrow ح^ن = ١ + ن ر + \frac{ن(ن - ١)}{٢} ر^٢ + ---$

$+ ر^ن$. (استخدمنا مفكوك ذي الحدين) $\Leftarrow ح^ن > ن ر$.

لذلك $\frac{١}{ح^ن} < \frac{١}{ن ر}$ ولكن:

$\lim_{ن \to \infty} \frac{١}{ن ر} = \lim_{ن \to \infty} (\frac{١}{ر}) . (\frac{١}{ن}) = (\lim_{ن \to \infty} \frac{١}{ر}) (\lim_{ن \to \infty} \frac{١}{ن}) = \frac{١}{ر} \times$ صفر = صفرًا .

أي أنه أصبح لـدينا: $٠ < \frac{١}{ح^ن} < \frac{١}{ن ر}$ لجميع قيم ن وقيمة $\frac{١}{ن ر}$ تقترب من الصفر كلما

زادت ن لذلك فإن قيمة $\frac{١}{ح^ن}$ تقترب من الصفر كلما زادت ن وعليه فإنَّ: $\lim_{ن \to \infty} \frac{١}{ح^ن}$ = صفرًا .

أيضًا نلاحظ أنَّ $ح^ن > ر ن \Leftarrow ا ح^ن > ا ر ن$ ولكن المتتابعة $\{ا ر ن\}$ تزداد بـلا حدود

مع ن وعليه فهي متباعدة إلى ما لا نهاية وحيث إن $ا ح^ن > ا ر ن$ فالمتتابعة $\{ا ح^ن\}$ تتباعد إلى ما

لا نهاية أيضًا .

لإثبـات (٣) ضع $ح = \frac{ب}{ل}$ عندئذ $ح > ١$ وبأخـذ ا = ١ ينتج أنَّ: $(\frac{ل}{ب})^ن = \frac{١}{ح^ن}$ ،

$(\frac{ب}{ل})^ن = ا ح^ن$ ولكن من (٢) فإنَّ المتتابعة $\{\frac{١}{ح^ن}\} = \{(\frac{ل}{ب})^ن\}$ متقاربة إلى الصفر بينما المتتابعة

$\{ا ح^ن\} = \{(\frac{ب}{ل})^ن\}$ متباعدة إلى ما لا نهاية

تدريب (٢-٧)

أثبت الجزء (٤) من النظرية (٢ ـ ٥)

(اقتراح: ضع $ح = \frac{١}{ء}$ واستخدم الجزء (٢))

مثال (٢-١٩)

ادرس تقارب المتتابعة $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{٢ \times ٣^{ن+١} + ٣ \times ٥^ن}{٤ \times ٣^ن + ٢ \times ٥^{ن+١}}$.

الحـــل :

$$\text{أ}_{\text{ن}} = \frac{٥^{\text{ن}} \left(٦ \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{ن}} + ٣ \right)}{٥^{\text{ن}} \left(٤ \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{ن}} + ٢ \times ٥ \right)}$$

$$= \frac{٦ \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{ن}} + ٣}{٤ \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{ن}} + ١٠}$$

وباستخدام النظريتين (٢ ـ ٤) ، (٢ ـ ٥) نجد أنَّ :

$$\text{نها}_{\text{ن} \to \infty} \text{أ}_{\text{ن}} = \frac{٦ \times \text{نها}_{\text{ن} \to \infty} \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{ن}} + ٣}{٤ \times \text{نها}_{\text{ن} \to \infty} \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{ن}} + ١٠}$$

$$= \frac{٦ \times ٠ + ٣}{٤ \times ٠ + ١٠} = \frac{٣}{١٠}$$

تدريب (٢-٨)

ادرس تقارب المتتابعة

$$\text{أ}_{\text{ن}} = \frac{-٥ \times ٢^{\text{ن}+٢} + ٧^{\text{ن}+١}}{٣ \times ٢^{\text{ن}+١} - ٤ \times ٧^{\text{ن}}} .$$

تمارين (٢ – ٤)

في كل مما يلي اكتب الحدود الأولى للمتتابعة غير المنتهية $\{ا_ن\}$ المعطاة ثم توقع نهايتها إن وجدت وأثبتها باستخدام التعريف (٢ ـ ٨):

(١) $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{ن}{ن+١}$.

(٢) $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{٣ن - ١}{٤ن + ٥}$.

(٣) $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{ن^٢ + ١}{٦ن + ٥}$.

ادرس تقارب المتتابعة المعطاة في كل مما يلي:

(٤) $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{٣ن + ٢}{٥ - ٤ن}$.

(٥) $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \sqrt{ن + ١} - \sqrt{ن}$.

(٦) $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{١}{\sqrt{ن + ١} - \sqrt{ن}}$.

(٧) $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \left(\frac{ن + ١}{ن} - \frac{٣ن}{٢ن - ١}\right)$.

(٨) $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{٣ \times ٢^{ن+٣} + ٤ \times ٩^{ن}}{٢ \times ٩^{ن+١} - ٥ \times ٢^{ن}}$.

(٩) $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{٣^{ن} - ٣ \times ٥^{ن+١}}{٨ \times ٣^{ن+١}}$.

(١٠) $\{ن_ن\}$ حيث $ب_ن = \frac{١}{(٣ن - ٢)(٣ن + ١)}$.

(١١) $\{خ_ن\}$ حيث $حـ_ن = \frac{١}{(٢ن - ١)(٢ن + ١)}$.

٢ - ٥ المتسلسلات غير المنتهية :

تعريف (٢ ـ ١٠)

إذا كان لدينا متتابعة $\{ا_ن\}$ غير منتهية فإن المجموع غير المنتهي جـ : $ا_١ + ا_٢ + ا_٣ + - - - + ا_ن - - - - -$ يسمى متسلسلة غير منتهية حدودها هي $ا_١، ا_٢، ا_٣ - - - ا_ن ، - - - -$

ونكتب جـ : $\sum_{ن=١}^{\infty} ا_ن$.

مثال (٢-٢٠)

إذا كان لدينا المتتابعة $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{١}{٣^ن}$ فما هي المتسلسلة غير المنتهية جـ والتي حدودها هي : $ا_١، ا_٢، ا_٣ - - - - - -$ ؟

الحـل :

لدينا $ا_١ = \frac{١}{٣}$ ، $ا_٢ = \frac{١}{٩}$ ، $ا_٣ = \frac{١}{٢٧}$ ، $ا_٤ = \frac{١}{٨١}$ ، - - - - - - . لذلك

$$جـ : \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١} + - - - + \frac{١}{٣^ن} + - - - - \quad أو\ جـ : \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٣^ن}$$

لعلّ الطالب يتساءل ماذا تعني المتسلسلة غير المنتهية؟ وهل المجموع غير المنتهي له قيمة محددة؟ وكيف نجري عملية الجمع في هذه الحالة؟

والجواب يعتمد على نوع المتسلسلة غير المنتهية وطبيعة عناصرها حيث يمكن في بعض الحالات إيجاد قيمة محددة للمجموع غير المنتهي وفي حالات أخرى لا يكون لهذا المجموع معنى ولمناقشة طريقة التمييز بين هذه الحالات نحتاج إلى التعريف التالي :

تعريف (٢ ـ ١١):

لتكن لدينا متسلسلة غير منتهية جـ: $\sum_{ن=١}^{\infty} ا_ن$ عندئذ لأي عدد طبيعي ن فإننا نعرِّف المجموع الجزئي $ح_ن$ للمتسلسلة جـ بأنه: $ح_ن = ا_١ + ا_٢ + ا_٣ + \cdots + ا_ن$ أي أنَّ: $ح_ن$ هو مجموع الحدود الأولى من جـ والتي عددها ن.

مثال (٢-٢١)

في المتسلسلة

$ح: \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٢^ن}$ أوجد المجاميع الجزئية: $ح_١$، $ح_٣$، $ح_٧$.

الحـل:

$ح_١ = ا_١ = \frac{١}{٢}$.

$ح_٣ = ا_١ + ا_٢ + ا_٣ = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٨}$.

$ح_٧ = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٣٢} + \frac{١}{٦٤} + \frac{١}{١٢٨} = \frac{١٢٧}{١٢٨}$.

الآن نبين متى يكون لمجموع متسلسلة غير منتهية معنى:

تعريف (٢ ـ ١٢)

لتكن جـ: $\sum_{ن=١}^{\infty} ا_ن$ متسلسلة غير منتهية ولنشكّل المتتابعة غير المنتهية $\{ح_ن\}$ والتي حدودها هي المجاميع الجزئية $ح_ن$ للمتسلسلة غير المنتهية جـ عندئذ: إذا كانت $\{ح_ن\}$ متقاربة ولها النهاية ل فإننا نقول إن جـ متقاربة ومجموعها هو ل ونكتب:

$$جـ = \sum_{ن=١}^{\infty} ا_ن = ل$$

أما في حالة أن $\{ح_ن\}$ متباعدة فنقول إن المتسلسلة جـ متباعدة وليس لها مجموع.

مثال (٢-٢٢)

ناقش هل المتسلسلة جـ: $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٢^{ن}}$ متقاربة أم لا ؟ وفي حالة أنها متقاربة فأوجد مجموعها .

الحــل :

إن $ح_ن = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + - - - + \frac{١}{٢^{ن}}$ وهذه متسلسلة هندسية منتهية حدها الأول $\frac{١}{٢}$ وأساسها $\frac{١}{٢}$ لذلك من النظرية (٢ ـ ٢) :

$$ح_ن = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر} = \frac{\frac{١}{٢}\ (١ - (\frac{١}{٢})^{ن})}{\frac{١}{٢}} = ١ - (\frac{١}{٢})^{ن} .$$

وبالتالي فإنَّ :

$$\lim_{ن \to \infty} ح_ن = \lim_{ن \to \infty} (١ - (\frac{١}{٢})^{ن}) = ١ - \lim_{ن \to \infty} (\frac{١}{٢})^{ن} .$$

وباستخدام النظرية (٢ ـ ٥) ينتج لدينا :

$$\lim_{ن \to \infty} ح_ن = ١ - \lim_{ن \to \infty} \frac{١}{٢^{ن}} = ١ - ٠ = ١ .$$

أي أنَّ متتابعة المجاميع الجزئية $\{ح_ن\}$ تقاربية ونهايتها هي ١ . لذلك فإن المتسلسلة جـ تقاربية

ومجموعها هو:

$$جـ = \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٢^{ن}} = ١ .$$

مثال (٢-٢٣)

بيّن هل المتسلسلة جـ : $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن+١}$ متقاربة أم متباعدة .

الحـــل :

$ح_ن = ١ - ١ + ١ - ١ + - - - + (- ١)^{ن+١}$

ونلاحظ عندما تكون ن زوجية فإن :

$ح_ن = ١ - ١ + ١ - ١ + - - - + ١ - ١$

= (١ - ١) + (١ - ١) + - - - + (١ - ١) = صفرًا بينما في حالة ن فردية فإن :

$ح_ن = ١ - ١ + ١ - ١ + - - - - - - ١ + ١$

= ١ - (١ - ١) - (١ - ١) - - - - - - (١ - ١) .

= ١ - ٠ - ٠ - - - - - - ٠ = ١

أي أن المجموع النوني $ح_ن$ في المتتابعة $\{ح_ن\}$ يأخذ القيمتين ٠ ، ١ بالتناوب مهما زادت ن لذلك فالمتتابعة $\{ح_ن\}$ متباعدة وبالتالي فإن المتسلسلة جـ متباعدة ولا يوجد لها مجموع .

مثال (٢-٢٤)

أثبت أن المتسلسلة جـ: $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن(ن+١)}$ متقاربة وأوجد مجموعها .

الحـــل :

لاحظ أولاً أن $\frac{١}{ن(ن+١)} = \frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١}$ لذلك

$ح_ن = \frac{١}{١\times٢} + \frac{١}{٢\times٣} + \frac{١}{٣\times٤} + - - - - - - + \frac{١}{ن(ن+١)}$

$= (١ - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}) + - - - - - + (\frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١})$

أي $ح_ن = ١ - (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}) - (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}) - (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٤}) - - - - - - (\frac{١}{ن} - \frac{١}{ن}) - \frac{١}{ن+١}$

ومنه $ح_ن = ١ - \frac{١}{ن + ١}$

لذلك : $\lim\limits_{ن \to \infty} ح_ن = \lim\limits_{ن \to \infty} (١ - \frac{١}{ن + ١}) = ١ - ٠ = ١$

أي أنَّ $\{ح_ن\}$ متقاربة ونهايتها ١ وعليه فإن **جـ** متقاربة ولدينا : **جـ** $= \sum\limits_{ن = ١}^{\infty} \frac{١}{ن(ن+١)} = ١$.

لو تأملنا في المثالين (٢ ــ ٢٢)، (٢ ـ ٢٤) فنلاحظ أن **جـ** متقاربة وأن الحد النوني $ا_ن$ لها يؤول إلى الصفر عندما تؤول ن إلى ما لا نهاية أي أن $\lim\limits_{ن \to \infty} \frac{١}{٢^ن} =$ صفرًا $= \lim\limits_{ن \to \infty} \frac{١}{ن(ن+١)}$ (كيف؟) .

بينما في المثال (٢ ــ ٢٣) فإن **جـ** متباعدة ونهاية الحد النوني $ا_ن$ لها هو ± ١ ولا تساوي الصفر .

وفي الواقع فإنه يوجد ارتباط بين تقارب المتسلسلة ونهاية الحد النوني لها كما في النظرية التالية :

نظرية (٢ ـ ٦) :

إذا كانت المتسلسلة **جـ**: $\sum\limits_{ن = ١}^{\infty} ا_ن$ متقاربة فإن $\lim\limits_{ن \to \infty} ا_ن =$ صفرًا .

مثال (٢-٢٥)

بين باستخدام النظرية (٢ ـ ٦) أن المتسلسلة **جـ**: $\sum\limits_{ن = ١}^{\infty} \frac{ن}{ن + ١}$ تباعدية .

الحـــل :

حيث إنَّ $ا_ن = \frac{ن}{ن + ١}$ فلدينا

$$\lim\limits_{ن \to \infty} ا_ن = \lim\limits_{ن \to \infty} \frac{ن}{ن + ١} = \lim\limits_{ن \to \infty} \frac{ن}{ن (١ + \frac{١}{ن})}$$

$$= \lim\limits_{ن \to \infty} \frac{١}{١ + \frac{١}{ن}} = \frac{١}{١ + ٠} = ١ \neq \text{صفرًا} .$$

لذلك فإن **جـ** ليست متقاربة (كيف ؟) .

ملحوظة (٢ - ٦) :

إن عكس النظرية (٢ ـ ٦) غير صحيح فقد تكون $\lim_{ن \to \infty} أ_ن$ = صفرًا ومع ذلك فالمتسلسلة جـ تباعدية كما في المثال التالي :

مثال (٢-٢٦)

أثبت أن المتسلسلة جـ : $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{1}{ن}$ متباعدة على الرغم من أن $\lim_{ن \to \infty} \frac{1}{ن}$ = صفرًا .

الحـل :

بملاحظـة أن $ح_٢ = ح_{٢^١} = \frac{٣}{٢} \ge \frac{١+٢}{٢}$ ، $ح_٤ = ح_{٢^٢} = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} \ge \frac{٢+٢}{٢}$ ،
$ح_٨ = ح_{٢^٣} = ١ + \frac{١}{٢} + ----- + \frac{١}{٨} \ge \frac{٣+٢}{٢}$ ، $ح_{١٦} = ح_{٢^٤} \ge \frac{٤+٢}{٢}$ ، . . . وعمومًا لأي ن
فإن $ح_{٢^ن} \ge \frac{ن+٢}{٢}$

أي أن المتتابعة {$ح_ن$} تزيد بـلا حدود كلما زادت ن بلا حدود لذلك فهي متبـاعدة وبالتالي المتسلسلة جـ متباعدة .

تدريب (٢-٩)

في المثال السابق أثبت بالاستقراء الرياضي أن : $ح_{٢^ن} \ge \frac{ن+٢}{٢}$.

تدريب (٢-١٠)

أثبت أنَّ المتسلسلة $\sum_{ن=1}^{\infty} أ_ن$ حيث $أ_ن = \frac{٣ ن}{ن^٢ - ١}$ تباعدية .

(اقتراح : أثبت أن $أ_ن > \frac{١}{ن}$ واستخدم المثال السابق) .

إذا نظـرنا إلى المتسلسلـة غير المنتهية الـواردة في المثـال (٢ ـ ٢٢) فنـلاحظ أن حدودهـا تشكل متتابعة هندسية غير منتهية أساسها $\frac{١}{٢}$ وهذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف (٢ ـ ١٣)

ليكن لدينا المتسلسلة جـ : $\sum_{ن=١}^{\infty}$ ا $ر^{ن-١}$ حيث ا ، ر ثابتان عندئذ نسمي جـ متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول ا وأساسها ر .

نظرية (٢ ـ ٧):

لتكن جـ : $\sum_{ن=١}^{\infty}$ ا $ر^{ن-١}$ متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول ا و أساسها ر عندئذ:

جـ متقاربة إذا وإذا فقط كانت $|ر| < ١$ وفي هذه الحالة فإن جـ = $\frac{ا}{١-ر}$. (٢-٥)

البرهان :

لدينا $ح_ن$ = ا + ا ر + ا $ر^٢$ + ---- + ا $ر^{ن-١}$ وباستخدام النظرية (٢ ـ ٢) ينتج أنَّ :

$$ح_ن = \frac{ا(١ - ر^ن)}{١ - ر} = \frac{ا}{١ - ر} - \frac{ا ر^ن}{١ - ر} .$$

$$\text{ومنه } \lim_{ن\to\infty} ح_ن = \lim_{ن\to\infty} \left(\frac{ا}{١ - ر} - \frac{ا ر^ن}{١ - ر} \right) .$$

$$= \frac{ا}{١ - ر} - \lim_{ن\to\infty} \frac{ا ر^ن}{١ - ر} \text{ (كيف؟)} .$$

$$= \frac{ا}{١ - ر} - \frac{ا}{١ - ر} (\lim_{ن\to\infty} ر^ن) .$$

ونلاحظ في حالة $|ر| < ١$ أن $\lim_{ن\to\infty} ر^ن$ = صفرًا .

$$\text{ومنه } \lim_{ن\to\infty} ح_ن = \frac{ا}{١ - ر} - \frac{ا}{١ - ر} \times ٠ = \frac{ا}{١ - ر} .$$

$$\text{وبالتالي فإن جـ} = \lim_{ن\to\infty} ح_ن = \frac{ا}{١ - ر} .$$

أما في حالة $|ر| > ١$ فملاحظة أن :

$ا_ن = ا - ح_ن (١ - ر)$ وحيث إن $\{ر^ن\}$ متباعدة من النظرية (٢ ـ ٥) فإن $\{ح_ن\}$ متباعدة أيضًا؛ لأنه لو كانت $\{ح_ن\}$ متقاربة فمن النظرية (٢ ـ ٤) ينتج أن $\{ر_ن\}$ أيضًا متقاربة وهذا غير صحيح .

أخيرًا نترك للطالب إثبات أنه في الحالتين $ر = \pm ١$ فإن $ح_ن$ متباعدة وبالتالي **جـ** متباعدة

تدريب (٢-١١)

أثبت في الحالتين $ر = \pm ١$ أن $ح_ن$ متباعدة .

مثال (٢-٢٧)

ناقش فيما يأتي هل المتسلسلة الهندسية المعطاة متقاربة أو لا ؟

وإذا كانت متقاربة فأوجد مجموعها .

(أ) **جـ**: $\sum_{ن=١}^{\infty} ٢ \left(\frac{١}{٥}\right)^{ن-١}$.

(ب) **جـ**: $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٣} \times ٤^{ن-١}$.

(حـ) **جـ**: $\sum_{ن=١}^{\infty} ٤ \left(-\frac{٢}{٣}\right)^{ن-١}$.

الحـل :

(أ) حيث إن الأساس $ر = \frac{١}{٥}$، فإن $|ر| = \frac{١}{٥} < ١$ وبالتالي من النظرية (٢ ـ ٧) فإن **جـ** متقاربة ومجموعها **جـ** $= \frac{ا}{١-ر} = \frac{٢}{١-\frac{١}{٥}} = \frac{٥}{٢}$.

(ب) لدينا $ر = ٤ > ١$ وبالتالي فإن **جـ** متباعدة .

(حـ) $ر = \frac{-٢}{٣} \Leftarrow |ر| = \frac{٢}{٣} < ١ \Leftarrow$ **جـ** متقاربة، **جـ** $= \frac{٤}{١-(-\frac{٢}{٣})} = \frac{٤}{\frac{٥}{٣}} = \frac{١٢}{٥}$.

تدريب (٢-١١)

(١) أوجد مجموع المتسلسلة اللانهائية : $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + ----$.

(٢) نـاقش فيما إذا كـانت المتسلسلـة المعطـاة متقاربـة أم لا ؟ وإذا كـانت متقـاربـة فأوجـد مجموعها .

(أ) $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٤}\right)^{ن}$.

(ب) $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٣^{-ن}}$.

تمارين (٢ – ٥)

في التمارين من (١) إلى (٤) أوجد المجاميع الجزئية الخمس الأولى للمتسلسلات الآتية ومن ثم أوجد المجموع الجزئي $ح_ن$ لكل متسلسلة :

(١) جـ : $-٢ + ١ + ٤ + ٧ + \ldots$

(٢) جـ : $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \text{-----}$.

(٣) جـ = $\sum_{ن=١}^{\infty} ٢^{ن}$.

(٤) $\sum_{ن=١}^{\infty} (٧ + (-١)^{ن})$.

في التمارين من (٥) إلى (٩)، أوجد مجموع المتسلسلة المعطاة إن أمكن :

(٥) $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن}$.

(٦) $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن}}{٥^{ن}}$.

(٧) $\sum_{ن=١}^{\infty} (٣ - ٢ن)$.

(٨) $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن}$.

(٩) $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{ن}$

تمارين عامة

(١) اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{ن + ١}{ن!}$.

(٢) اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتابعة $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = (-١)^{ن-١} \frac{س^{٢ن-٢}}{(ن-١)!}$

(٣) اكتب الحد النوني $ا_ن$ للمتتابعة ٢ ، −٥ ، ٨ ، −١١ ، ١٤ ، ....

(٤) اكتب الحد النوني $ا_ن$ للمتتابعة:

$\frac{٣}{١}$ ، $\frac{٤}{١ \times ٢}$ ، $\frac{٥}{١ \times ٢ \times ٣}$ ، ....

ثم ادرس تقارب هذه المتتابعة .

(٥) كم عدد الأوساط الحسابية اللازم إدخالها بين −٤ ، ٢٠ بحيث يكون مجموع المتسلسلة الحسابية الناتجة يساوي ٤٨ ؟ .

(٦) مزرعة للقمح أنتجت في السنة الأولى ١٥٠ طنًّا ، فإذا كان الإنتاج يزيد بنسبة ١٥٪ احسب كمية الإنتاج بأطنان القمح بعد تسع سنوات .

(٧) بدأ مصنع لعصير الفواكه عمله بإنتاج ١٠٠٠ لتر من العصير في الأسبوع على أن يزيد الإنتاج بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع . فاحسب عدد الأسابيع اللازمة حتى يصل الإنتاج إلى ١٤,٥٥٠ لتر ثم احسب مجموع الإنتاج الكلي خلال هذه الأسابيع .

(٨) احسب نهاية المتتابعة $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{٢^ن - ١}{٢^ن \times ن}$.

(٩) أوجد الحد العام للمتتابعة :

$\sqrt{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ ، $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ ، ...... ثم احسب نهايتها .

(١٠) أثبت أن المتتابعة $\{ا_ن\}$ حيث $ا_ن = \frac{٢^ن}{ن}$ متباعدة .

$$\left(\text{لاحظ أن } ٢^ن = (١ + ١)^ن > \frac{ن(ن - ١)}{٢} \right)$$

(١١) ابحث تقارب المتتابعة $\{ا_ن\}$ حيث :

$ا_ن = \text{جا} \left(\frac{ن}{ن + ١} ط \right)$.

(١٢) أثبت أن المتسلسلة جـ : $\sum_{ن = ١}^{\infty} ٤ \times \left(\frac{٣}{٥} \right)^ن$ متقاربة وأوجد مجموعها .

(١٣) أثبت أن المتسلسلة جـ : $\sum_{ن = ١}^{\infty} \frac{٣ن^٢ - ١}{٨ن^٢ + ١}$ متباعدة . (لاحظ نهاية الحد النوني) .

الباب الثالث

النهـايـات والاتصـال

٣ - ١ الـدوال الحقيقيـة :

نذكرك فيما يأتي ببعض الأمور المتعلقة بالدوال الحقيقية (على سبيل المراجعة) :

تعريف (٣-١)

الدالـة الحقيقية هي الدالة التـي فيها كل من المجال والمجال المقـابل مجموعة جـزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

معنى التعـريف أن التطبيق د : سـ ← صـ يسمى دالـة حقيقية إذا كـانت كل من سـ وَ صـ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، وكما تعلم من قبل :

تُدعى المجموعة سـ مجال الدالة د وَ المجموعة صـ مجالها المقابل ، ونقول إن د معرَّفة على سـ . كما أنَّ لكل س ∈ سـ يـوجد عنصر وحيـد في صـ نـرمز لـه بـالرمـز د (س) ونكتب ذلك : ص = د (س) وتسمّى هذه **قاعدة الـدالة** ؛ ويسمّى س **المتغيرْ المستقل** وَ ص **المتغير التابع** . أمّا **مدى الدالة** فهو المجموعة { ص ∈ صـ : ص = د (س) ، س ∈ سـ }

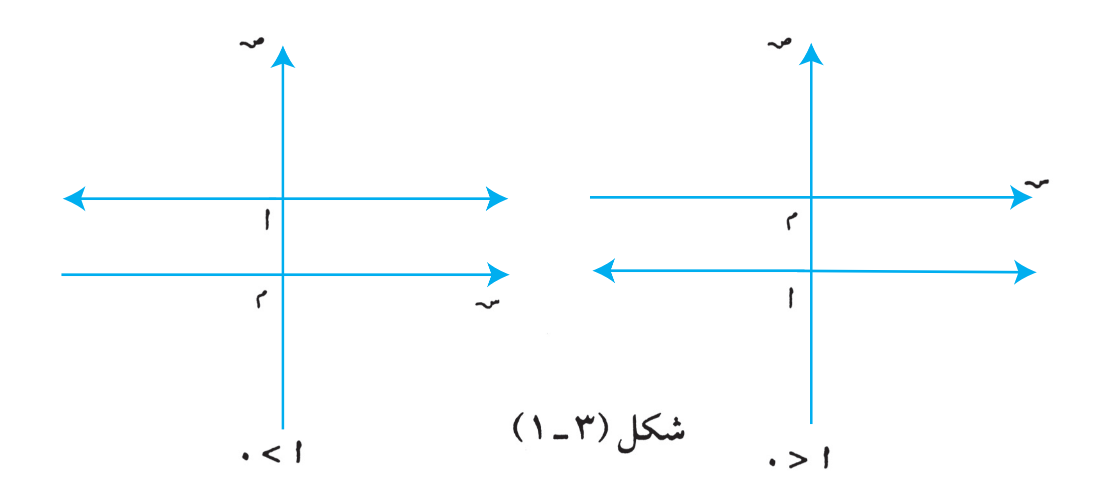
ملحوظـة (٣ -١)

في أثنـاء دراستنا للـدوال الحقيقية سنعني بمجـال الدالـة د ، المجموعة { س ∈ ح : د (س) معرَّفة} . أي أنَّ مجال الدالـة هو أكبر مجموعة جـزئية من ح تكون فيها الـدالة معرَّفة . أمّـا مدى الـدالـة د فسنعني بـه أكبر مجموعـة جـزئيـة من ح عنـاصرها قيـم للدالـة أي : { ص ∈ ح : ص = د(س)، س ∈ ح وَ د (س) معرَّفـة } . إلا أنَّـه في بعض الأمثلة قـد نُحـدِّد مجال الدالـة د بمجموعة جزئية معينة من { س ∈ ح : د (س) معرَّفة } .

وفيما يلي عرض لأهـم الدوال الحقيقية التـي ستقابلهـا كثيراً في هذه الدراسـة ، علماً بأنَّ الكثير منها هي من معلوماتك السابقة :

(١) الدالـة الثـابتـة :

وقاعدتها : د (س) = ا لكل س ∈ ح حيث ا عدد حقيقي ثابت . (٣-١)



شكل (٣ـ١)

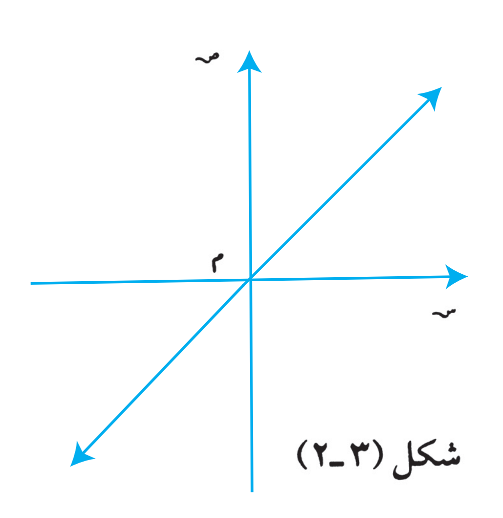
مجال الدالة الثابتة = ح، ومداها = { ا } .

ويمثِّلها هندسيًا خط مستقيم يوازي المحور السيني كما في الشكل (٣-١) .

(٢) دالـة التطـابق :

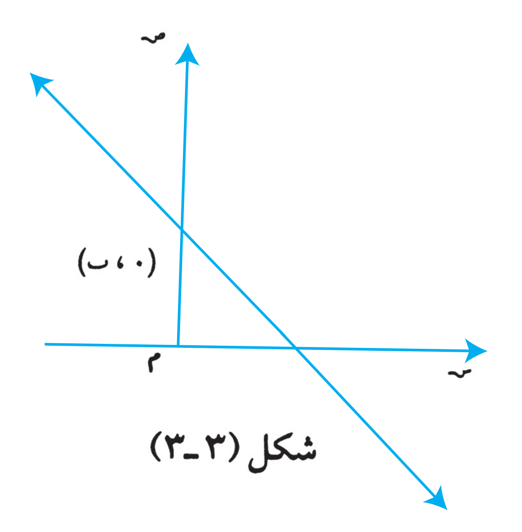
قاعدتها د(س) = س لكل س ∈ ح (٣-٢)

مجال هذه الـدالة = ح، ومداها = ح (إلاّ إذا عُرِّفت على مجمـوعة جـزئيـة من ح فتكون هـذه المجموعـة الجزئية هي المجال) . ويمثِّلهـا هندسيًا خط مستقيم يمر في نقطة الأصل وينصِّف الربعين الأول والثالث كما في الشكل (٣-٢) .



شكل (٣ـ٢)

(٣) دالـة الـدرجة الأولى :

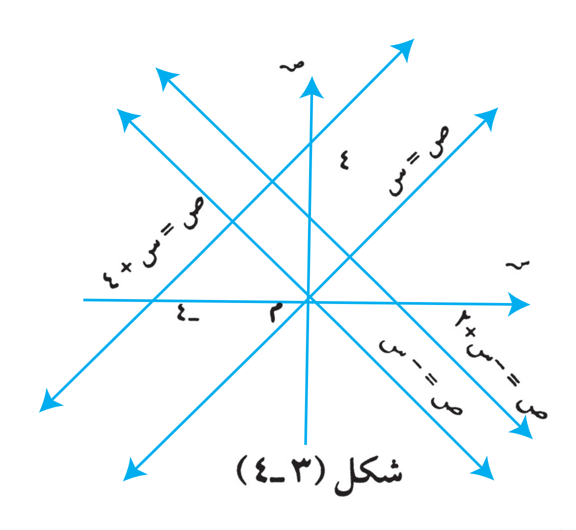


شكل (٣ـ٣)

قاعدتها : د (س) = ا س + ب

لكل س ∈ ح ، ا ، ب ثـوابت من ح ، ا ≠ صفراً. (٣-٣) مجال دالـة الدرجـة الأولى هـو ح، ومـدى دالـة الــدرجـة الأولى = ح ويمثّلها هندسيًـا خط مستقيم ميله ا ويمر في النقطة (٠ ، ب) . كما في الشكل (٣-٣) .

فعلى سبيل المثال الشكل (٣-٤) يمثّل بعضاً من دوال الدرجة الأولى .



شكل (٣ـ٤)

تدريب (٣-١)

في الدالة ص = ا س + ب :

(١) ماذا ينتج في حالة ا = صفراً؟

(٢) ماذا ينتج في حالة ا = ١ وَ ب = صفراً؟

(٣) ماذا تقول عن العدد ا ؟

(٤) دالـة الـدرجة الثانيـة :

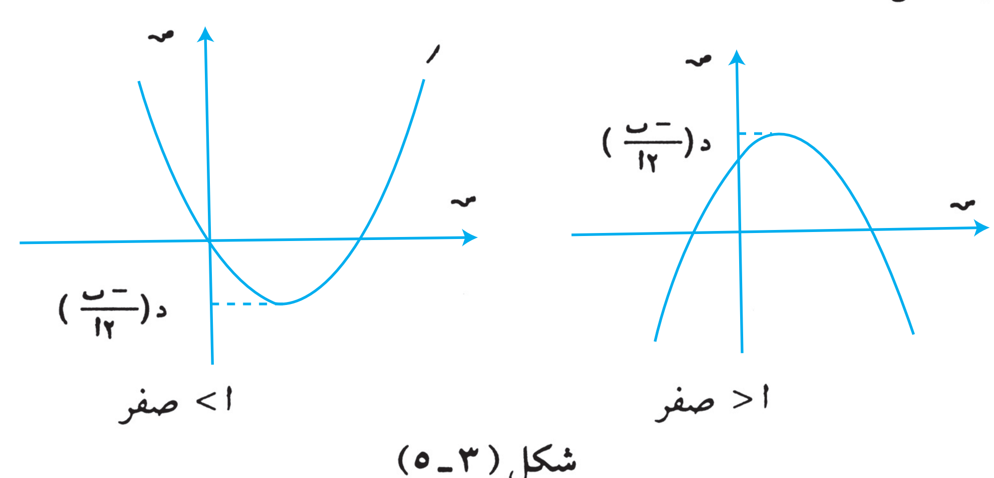
قاعدتها: د (س) = ا س^{٢} + ب س + حـ لكل س ∋ ح (٣-٤) ا، ب، حـ ثوابت من ح، ا ≠ صفراً.

إنّ المنحني الـذي يمثّل هــذه المعـادلـة، كما تعلم، هـو قطع مكــافئ محوره يـوازي المحـور الصادي. ونقطة رأسه $\left(\frac{-ب}{٢ا} ، د\left(\frac{-ب}{٢ا}\right)\right)$ وتتحدد فتحة هذا القطـع حسب إشارة ا (معامل س^{٢}) على النحو التالي:

(١) تكون فتحة القطع إلى أعلى إذا كان ا > صفر.

(٢) تكون فتحة القطع إلى أسفل إذا كان ا < صفر.

انظر الشكل (٣-٥)



شكل (٣ـ٥)

مجـال هـذه الدالـة = ح .

ولتعيين مدى هذه الدالة فإنَّه بالنظر إلى الشكل (٣-٥) نجد أنَّ :

مدى هذه الدالة = $\left[\right.$ د $\left(\frac{-ب}{٢ا}\right)$ ، ∞) إذا كان ا > صفر،

مدى الدالة = $\left(-\infty \text{، د}\left(\frac{-ب}{٢ا}\right) \right]$ إذا كان ا < صفر.

تدريب (٣-٢)

في الدالة (٣ - ٤)

(١) ماذا ينتج في حالة ا = صفراً؟

(٢) ماذا ينتج في حالة ا = ب = صفراً؟

(٣) أوجد معادلة محور التناظر وارسمه على الشكل (٣-٥).

مثال (٣-١)

ارسم المنحني البياني للدالة: د (س) = $س^٢$ - ٥ س + ٦ ثم عيِّن كلاًّ من مجالها ومداها.

الحـــل:

هذه الدالة من الدرجة الثانية فالمعادلة من الشكل ص = ا $س^٢$ + ب س + حـ والمنحني الذي يمثلها قطع مكافئ محوره يوازي المحور الصادي، وحيث إن ا = ١ > صفر، إذن فتحة القطع المكافئ تكون إلى أعلى.

نوجد أصفار الدالة بوضع د (س) = صفراً

$س^٢$ - ٥ س + ٦ = صفراً ⇔ (س - ٢) (س - ٣) = صفراً

⇔ س = ٢ أو س = ٣

ثم نوجد نقطة رأس المنحني:

$$س = \frac{-ب}{٢ا} = \frac{-(-٥)}{٢ \times ١} = \frac{٥}{٢}$$

د $\left(\frac{٥}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} - ٥\left(\frac{٥}{٢}\right) + ٦ = -\frac{١}{٤}$

إذن نقطة رأس المنحنى = $\left(\frac{٥}{٢} ، -\frac{١}{٤}\right)$

ومحور التناظر: س = $\frac{٥}{٢}$

نأخذ بعض النقط حول نقطة الرأس مثل :

س = ١ ، س = ٤ ونوجدها :

د (١) = ١ − ٥ + ٦ = ٢

د (٤) = ٢

شكل (٣ـ٦)

ونكمل الشكل العام للمنحنى كما في الشكل (٣-٦) مستفيـدين من التناظـر ولعلك تلاحظ أن مجال د = ح وأن مداها = $\left[-\frac{١}{٤} ، \infty\right)$.

(٥) الدالـة كثـيرة الحـدود :

لعلَّك تذكر دوال كثيرات الحدود التي تعرَّفت عليها في الصف الثاني الثانوي ، ورأيت حينذاك الشكل العام لها :

د : ح ← ح بحيث لكل س ∈ ح فإن :

د (س) = $أ_{ن}$ $س^{ن}$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + . . . + $أ_{٢}$ $س^{٢}$ + $أ_{١}$ س + $أ_{٠}$

وهي كثيرة الحدود من الدرجة ن (ن ∈ ك ، $أ_{ن}$ ∈ $ح^{*}$ ، بينما : $أ_{ن-١}$ ، $أ_{ن-٢}$ . . . ، $أ_{٠}$ ∈ ح) .

تدريب (٣-٣)

بيّن أيًّا من الدوال الآتية دالة كثيرة الحدود، ثم عيِّن درجتها:

(١) د (س) = ٢ س^{٢} − ٣ س + ٤

(٢) د (س) = س − ٥ س^{٢}

(٣) د (س) = ٥ س$^{-١}$ + س

(٤) د (س) = − س^{٥} − ٣ س^{٤} + ١٧ س

(٥) د (س) = ا

(٦) إشـارة مقدار جبري:

نتوقف الآن عن سياق عـرض بعض الأنواع الرئيسة للدوال الحقيقية لنـورد طريقة إيجاد المجال لبعض هذه الـدوال: فلو طلب منك إيجاد مجال الـدالة د (س) = $\sqrt{\text{هـ(س)}}$، فإنَّ شرط تعريف هذه الدالة - كما تعلم - هو: هـ (س) ≥ ٠ وهذا ما يقودنا إلى أهمية دراسة إشارة مقدار جبري:

ا - إذا كـانت هـ(س) = ا س + ب، فإن الشرط ا س + ب ≥ ٠ يقـودك إلى متبـاينـة من الدرجة الأولى، وقد سبق لك دراسة ذلك في المرحلة المتوسطة، وفي الصف الأول الثانوي.

مثال (٣-٢)

أوجد مجال كل من الدالتين:

(١) د (س) = $\sqrt{\text{٢س − ٥}}$ (٢) د (س) = لو $\frac{\text{س − ١}}{\text{س + ١}}$

الحـــل:

(١) شرط التعريف هو: ٢ س − ٥ ≥ ٠ ⟸ س ≥ $\frac{٥}{٢}$

فيكون، والحالة هذه، مجال الدالة : $[-\frac{5}{2} ، \infty)$

(٢) شرط التعريف : $\frac{س - ١}{س + ١} > ٠$ مع س + ١ ≠ ٠ ⟸ س ≠ − ١

ولعلّك تـلاحظ أن إشارة الكسر الموجـود في الطرف الأيمن من المتبـاينة تتعلق بإشـارة كلٍّ من بسطه ومقامه، ونحصل على إشارة الكسر، وبالتالي حل المتباينة، بواسطة الجدول الآتي :

س	+ ∞	١		−١	− ∞
إشارة س − ١ إشارة س + ١ إشارة الكسر $\frac{س - ١}{س + ١}$	+ + +	٠ + ٠	− + −	− ٠ غير معرَّف	− − +
الدالة	معرَّفة	غير معرفة	غير معرَّفة	غير معرَّفة	معرَّفة

فيكون مجال الدالة المعطاة : (−∞ ، −١) ∪ (١ ، ∞)

وهذا ما يوضّحه الرسم الآتي على خط الأعداد :



ب- إذا كـانت هـ(س) = ا س^2 + ب س + حـ (٣-٥) فإن الشرط ا س^2 + ب س + حـ ≥ ٠ يقودك إلى متبـاينة من الـدرجة الثانيـة بمتغيّر واحد في ح وهذا يستـدعي دراسة إشـارة المقدار (٣-٥)، (حيث ا ≠ ٠ ، ب ، حـ أعـداد حقيقية، س متغيّر حقيقي)، وهـو كما تعلم

(في الصف الثالث المتوسط) ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية، وسوف نكتبه بالشكل الآتي :

$$ا س^٢ + ب س + حـ = ا(س^٢ + \frac{ب}{ا} س + \frac{حـ}{ا})$$

$$= ا \left[س^٢ + \frac{ب}{ا} س + (\frac{ب}{٢ا})^٢ + \frac{حـ}{ا} - (\frac{ب}{٢ا})^٢\right]$$

$$= ا\left[(س + \frac{ب}{٢ا})^٢ + \frac{٤ا حـ - ب^٢}{٤ا^٢}\right] \qquad (٣-٦)$$

وهنا نميّز ثلاث حالات :

الحالة الأولى :

المميّز $ن = ب^٢ - ٤ا حـ < ٠ \Leftarrow ٤ ا حـ - ب^٢ > ٠$ وبالتالي : $\frac{٤ ا حـ - ب^٢}{٤ا^٢} > ٠$ وحيث إنّ $(س + \frac{ب}{٢ا})^٢$ موجب أو مساوٍ للصفر، فإنَّ المقدار داخل القوس الكبير من العلاقة (٣-٦) موجب لكل $س \in ح$، وعليه فإنَّ إشارة المقدار $ا س^٢ + ب س + حـ$ **موافقة لإشارة ا (معامل $س^٢$)**.

الحالة الثانية :

المميز $ن = ب^٢ - ٤ا حـ = ٠$، تصبح العلاقة (٣-٦) على الشكل :

$ا س^٢ + ب س + حـ = ا (س + \frac{ب}{٢ا})^٢$ ولكن $(س + \frac{ب}{٢ا})^٢$ موجب ما لم تكن $س = - \frac{ب}{٢ا}$ (حيث يساوي الصفر)، فتكون إشارة المقدار $ا س^٢ + ب س + حـ$ **موافقة لإشارة ا من أجل جميع قيم س الأخرى**.

الحالة الثالثة :

المميز $ن = ب^٢ - ٤ا حـ > ٠$، وهذا يعني - كما تعلم - أن للمقدار (٣-٥) جذرين هما :

$$ل_1 = \frac{-ب + \sqrt{ن}}{2ا} \quad ، \quad ل_2 = \frac{-ب - \sqrt{ن}}{2ا}$$

ولعلّك تلاحظ أن العلاقة (٣-٦) تكتب بالشكل :

$$ا س^2 + ب س + حـ = ا \left[(س + \frac{ب}{2ا})^2 - \frac{ب^2 - 4 ا حـ}{4ا^2} \right]$$

$$= ا \left[(س + \frac{ب}{2ا})^2 - (\frac{\sqrt{ن}}{2ا})^2 \right]$$

$$= ا \left(س + \frac{ب}{2ا} - \frac{\sqrt{ن}}{2ا}\right) \left(س + \frac{ب}{2ا} + \frac{\sqrt{ن}}{2ا}\right)$$

$$= ا \left(س - \frac{-ب + \sqrt{ن}}{2ا}\right) \left(س - \frac{-ب - \sqrt{ن}}{2ا}\right)$$

$$= ا (س - ل_1) (س - ل_2) \qquad (٣-٧)$$

فلو اعتبرنا $ل_1 < ل_2$ لأمكن التعرّف على إشارة ثلاثي الحدود حسب قيم س المختلفة كما يأتي :

(١) إذا كانت $س < ل_1 < ل_2$ فإن إشارة كل من $(س - ل_1)$، $(س - ل_2)$ تكون سالبة، وعليه تكون إشارة حاصل الضرب $(س - ل_1) (س - ل_2)$ موجبة .

(٢) وكذلك : إذا كانت $س > ل_2 > ل_1$ فإن إشارة كل من : $(س - ل_1)$ ، $(س - ل_2)$ تكون موجبة ، وعليه تكون إشارة حاصل الضرب موجبة أيضاً .

ونلخّص الفقرتين (١)، (٢) بقولنا :

«إن إشارة حاصل الضرب موجبة لكل $س \in ح \wedge س \notin [ل_1 ، ل_2]$ وبتعبير آخر: **لكل قيم س الواقعة خارج فترة الجذرين $[ل_1 ، ل_2]$** ، وبالتالي فإنَّ المقدار : $ا س^2 + ب س + حـ = ا (س - ل_1) (س - ل_2)$ **تكون إشارته مثل إشارة ا**» .

(٣) أما إذا كانت **$ل_1 < س < ل_2$** فإنَّ إشارة حاصل الضرب تكون سالبة .

وبالتالي فإنَّ إشارة $ا س^2 + ب س + حـ = ا (س - ل_1) (س - ل_2)$ **تكون مخالفة لإشارة ا** .

ونلخّص ذلك بقولنا :

إذا استثنينا قيم س التي تجعل المقدار ا س^{٢} + ب س + حـ مساوياً الصفر - إن وجدت - فإنَّ إشارة هذا المقدار تكون مماثلة لإشارة ا في جميع الحالات، إلا إذا كان لهذا المقدار جذران، وكانت س تنتمي إلى الفترة المفتوحة المحدّدة بهما، فإن إشارة المقدار تكون مخالفة لإشارة ا.

مثال (٣-٣)

ادرس إشارة كل من :

(ا) -٣س^{٢} + س - ١

(ب) س^{٢} - ٤س + ٤

(حـ) ٣ - ٥س - ٢س^{٢}

الحــل :

(أ) ن = ١ - ١٢ = -١١، المميز سالب، فتكون إشارة المقدار دوماً مثل إشارة ا = -٣، يعني أنها سالبة.

(ب) ن = ١٦ - ١٦ = ٠ يوجد جذر واحد (مكرر) ل$_{١}$ = ل$_{٢}$ = ٢، المميز يساوي الصفر، فالمقدار س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠ لقيمة س = ٢، وإشارته تكون مثل إشارة ا = ١، أي موجبة، للقيم الأخرى للمتغير س.

(جـ) يصبح المقدار بعد ترتيبه : -٢س^{٢}- ٥س + ٣ ، ن = ٤٩ ، المميز موجب، والجذران ل$_{١}$ = -٣ ، ل$_{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ فيكون المقدار -٢س^{٢} - ٥س + ٣ سالباً، (أي إشارته مثل إشارة ا = -٢)

لقيم س التي تقع خارج فترة الجذرين، أي عندما: س < -٣ ، س > $\frac{١}{٢}$ ويكون موجباً (أي إشارته مخالفة لإشارة ا) لقيم س المحصورة بين الجذرين، أي عندما -٣ < س < $\frac{١}{٢}$. ونوضِّح ذلك في الجدول الآتي:

س	+∞		$\frac{١}{٢}$		-٣		-∞
إشارة: ٣ - ٥س -٢س^{٢}		-	٠	+	٠	-	
		موافقة لإشارة ا		مخالفة لإشارة ا		موافقة لإشارة ا	

ونمثّل ذلك على خط الأعداد كالآتي:

إشارة ٣ - ٥س - ٢س^{٢} - - - صفر + + + + + صفر - - - - - -

+∞ $\frac{١}{٢}$ م -٣ -∞

مثال (٣ - ٤)

استعن بحل المثال (٣-٣) لإيجاد مجال كلّ من الدوال الآتية:

(ا) د(س) = لو (-٣س^{٢} + س - ١)

(ب) د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ ، هـ(س) = لو (س^{٢} - ٤س + ٤)

(حـ) د(س) = $\sqrt{٣ - ٥س - ٢س^{٢}}$ ، هـ(س) = لو (٣ - ٥س - ٢س^{٢})

الحـــل :

(أ) بالرجوع إلى الفقرة (أ) من حل المثال (٣-٣)، فإن: $-٣س^{٢} + س - ١ < ٠$ لكل $س \in ح$،
وبالتالي تكون د(س) غير معرَّفة على ح ومجالها = $\varnothing$.

(ب) بالرجوع إلى الفقرة (ب) من المثال (٣-٣) فإن: $س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠$ من أجل س = ٢
وهو موجب لكل $س \in ح$ أي أن د(س) معرَّفة لكل $س \in ح$ فمجالها = ح ، أما هـ(س)
فإن مجالها = ح - { ٢ } لأنها غير معرفة عندما $س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠$ كما تعلم من
خصائص اللوغاريتم.

(جـ) بالرجوع إلى الجدول السابق فإنَّ: د (س) مجالها $[-٣ ، \frac{١}{٢}]$ ، هـ(س) مجالها $(-٣ ، \frac{١}{٢})$.

تدريب (٣-٤)

حدّد مجال كل من الدوال الآتية :

(أ) د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٥س + ٦}$

(ب) د(س) = لو$(س^{٢} - ٥س + ٦)$

(ج) د(س) = $\frac{١}{س} + س$

(د) د(س) = لو$(س^{٢} + س + ١)$

(هـ) د(س) = $\sqrt{-س^{٢} + س - ١}$

(و) د(س) = لو$(-س^{٢} + س - ١)$

(٧) دالـة القـيمة المطـلقـة (دالـة المقـياس) :

وتعرَّف بالقاعدة

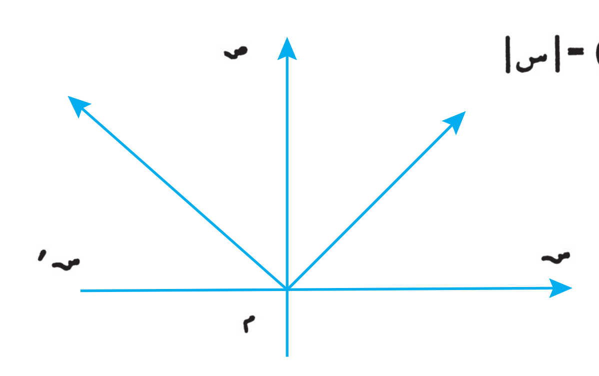
$$د(س) = |س| = \begin{cases} س & \text{إذا كانت } س \geq ٠ \\ -س & \text{إذا كانت } س \leq ٠ \end{cases}$$

مجال دالـة المقيـاس = ح وحيث د(س) = |س|

إن |س| ≥ صفراً لكل س ∈ ح إذن

مدى دالـة المقياس = [٠ ، ∞)، وتمثَّل

بيانيا كما في الشكل (٣-١٠).



شكل (٣ـ١٠)

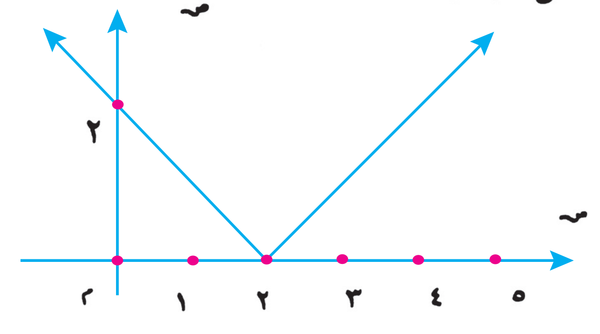
مثال (٣-٥)

أعد تعريف كل من الدوال الآتية وعيِّن مجال كل منها ومداها :

(أ) |س − ٢|

(ب) |س − ٢| + ٣

(جـ) |س٢ − ٥س + ٦|



شكل (٣ـ١١)

الحــل :

(أ) |س − ٢| = { س − ٢ إذا كانت س ≤ ٢ ؛ ٢ − س إذا كانت س ≥ ٢ }

المجال = ح، المدى = [٠ ، ∞)، انظر الشكل (٣-١١).

(ب) |س − ٢| + ٣ = { س − ٢ + ٣ إذا كانت س ≤ ٢ ؛ ٢ − س + ٣ إذا كانت س ≥ ٢ }

= { س + ١ إذا كانت س ≤ ٢ ؛ ٥ − س إذا كانت س ≥ ٢ }

المجال = ح، المدى = [٣ ، ∞)، انظر الشكل (٣-١٢).

ص
٥
٣
س
٢

شكل (٣ـ١٢)

(جـ) نفرض أن د (س) = س^{٢} − ٥س + ٦

د(س) = صفراً ⇔ س^{٢} − ٥س + ٦ = صفراً ⇔

(س − ٢)(س − ٣) = صفراً

إذن س = ٢ أو س = ٣

ومن ذلك نستنتج بسهولة أنَّ :

د(س) ≤ صفر لكل س ∈ ح − (٢ ، ٣) (من خارج فترة الجذرين [٢ ، ٣])

د(س) < صفر لكل س ∈ (٢ ، ٣) (س محصورة بين الجذرين) .

ويمكن تمثيل إشارة د(س) على خط الأعداد كما في الشكل (٣−١٣) .

+ ∞ ٣ ٢ ١ ٢ − ∞

إشارة د(س) : + + + − + + + +

شكل (٣−١٣)

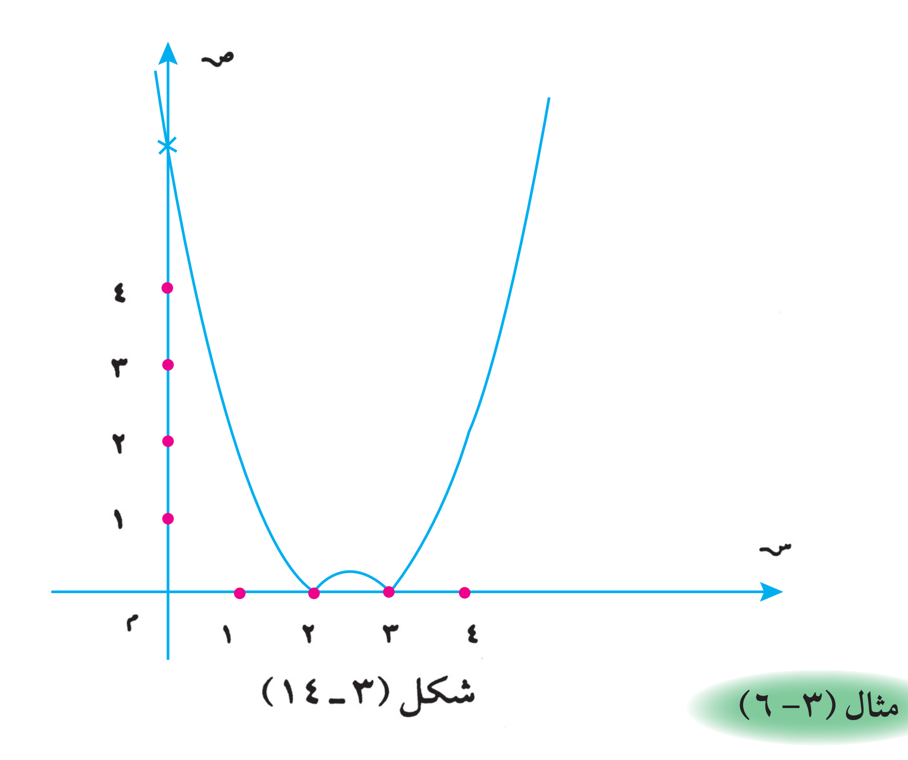
وبالرجوع إلى القيمة المطلقة |د (س)| نجد أن :

|س^{٢} − ٥س + ٦| = {
س^{٢} − ٥س + ٦ إذا كانت س < ٢
− س^{٢} + ٥س − ٦ إذا كانت ٢ ≥ س ≥ ٣
س^{٢} − ٥س + ٦ إذا كانت س > ٣

والشكل (٣−١٤) يمثِّل منحنى هذه الدالة .

مجالها = ح لأن الدالة دالـة كثيرة حدود في الفترات الجزئية من مجالها . (لاحظ أن الـدالة نفسها ليست كثيرة حدود) .

المدى = [٠ ، ∞) .



شكل (٣ ـ ١٤)

مثال (٣– ٦)

أعد تعريف الدالة الآتية وعيّن مجالها ومداها .

$$ص = \frac{|س + ١| + |س - ١|}{٢}$$

الحــل :

نلاحظ أن :

$$|س + ١| = \begin{cases} س + ١ & \text{إذا كانت } س \geq -١ \\ -(س + ١) & \text{إذا كانت } س \leq -١ \end{cases}$$

وأن :

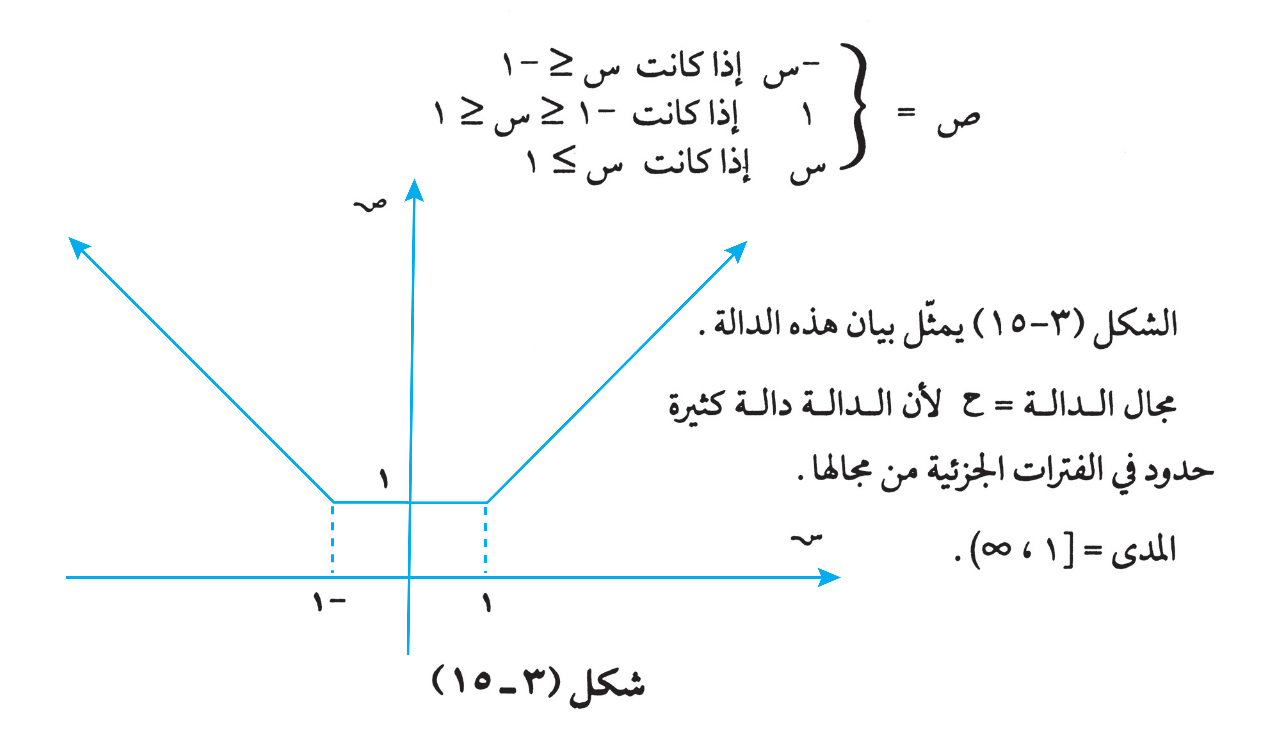
$$|س - ١| = \begin{cases} س - ١ & \text{إذا كانت } س \geq ١ \\ ١ - س & \text{إذا كانت } س \leq ١ \end{cases}$$

نمثل هذه الدالة على محور الأعداد الحقيقية فنجد أن :

∞	١	١−	∞ −
|س + ١|	س + ١	س + ١	− س − ١
+	+	+	+
|س − ١|	س − ١	١ − س	١ − س
÷	÷	÷	÷
٢	٢	٢	٢
ص =	س	١	− س

إذن :

ص = { −س إذا كانت س ≤ −١ ؛ ١ إذا كانت −١ ≤ س ≤ ١ ؛ س إذا كانت س ≥ ١ }



الشكل (٣−١٥) يمثّل بيان هذه الدالة .

مجال الـدالـة = ح لأن الـدالـة دالـة كثيرة حدود في الفترات الجزئية من مجالها .

المدى = [١ ، ∞) .

شكل (٣ـ١٥)

(٨) الدالـة الأسّـية :

كذلك نذكّرك بالدالة الأسية التي تعرّفت عليها في الصف الأول الثانوي :

تعريف (٣-٢)

إذا كان ا ∈ ح⁺ -{ ١ } وكان ىا تطبيقاً من ح إلى ح⁺ (حيث ح⁺ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة) معرفاً بالقاعدة :

ىا (س) : س ← اˢ (٣-٥)

فإن ىا تسمّى الدالة الأسية للأساس ا .

ملحـوظة (٣ - ٢)

(١) في الرمز اˢ، يسمى ا الأساس، س الأس .

(٢) مجال الدالة ىا هو ح، أي أن الأس عدد حقيقي (س ∈ ح) .

(٣) إذا كان ا = هـ الأساس الطبيعي ≃ ٢,٧١٨٣ فيكون ىهـ (س) = هـˢ هي الـدالة الأسيـة الطبيعية التي غالباً ما يشار إليها بالعبارة «الدالة الأسية» .

(٤) نرى من التعريف (٣-٢) أن ا ≠ ١ لأنه عندما ا = ١ نجد : ى١(س) = ١ وهي دالة ثابتة ويمثّلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ١) ويوازي المحور السيني .

(٥) الدالة ىا (س) = ص = اˢ تمرّ بالنقطة (٠ ، ١) .

(٦) الدالة الأسية دائماً موجبة لأن مجالها المقابل هو ح⁺ والدالة اˢ من نوع التقابل .

مثال (٣ – ٧)

ارسم الدالة ص = ٢^س^ وعين مجالها .

الحـــل :

نكوّن الجدول الآتي باختيار قيم مناسبة للعدد س وحساب قيم ص :

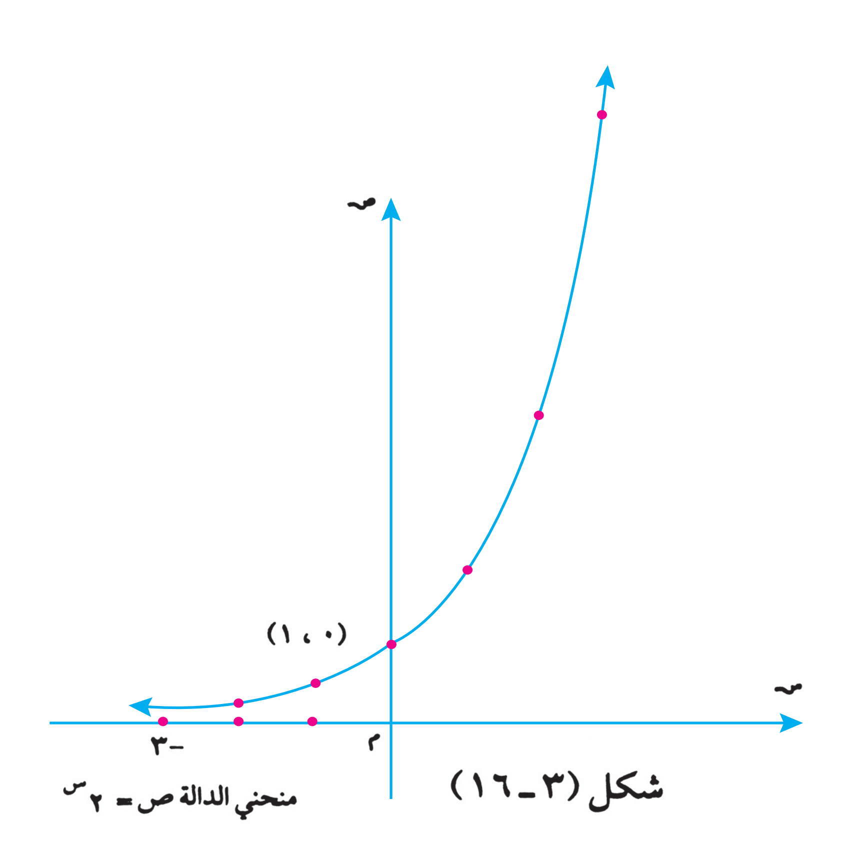
س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	$٢^{-٣} = \frac{١}{٨}$	٠,٢٥	٠,٥	١	٢	٤	٨

انظر الشكل (٣-١٦)

مجالها = ح .

مجالها المقابل = $ح^+$.

المدى (٠ ، ∞) .



شكل (٣ـ١٦)

(٩) الدالـة اللوغاريتمية :

ذكرنا سابقًا أنَّ الدالة الأسية ص = ا^س حيث ا ∈ ح^+ – { ١ } ، س ∈ ح، هي دالة تقابل من مجمـوعة الأعـداد الحقيقية إلى مجمـوعة الأعـداد الحقيقيـة الموجبة . ولـذا فإن هذه الـدالة لها دالـة عكسية تسمى الـدالة اللـوغاريتميـة . تعرّفنا عليهـا أيضاً في الصف الأول الثـانوي ونـوردها على سبيل المراجعة :

تعريف (٣-٣)

إذا كان ا ∈ ح^+ – { ١ } ،فإنَّ :

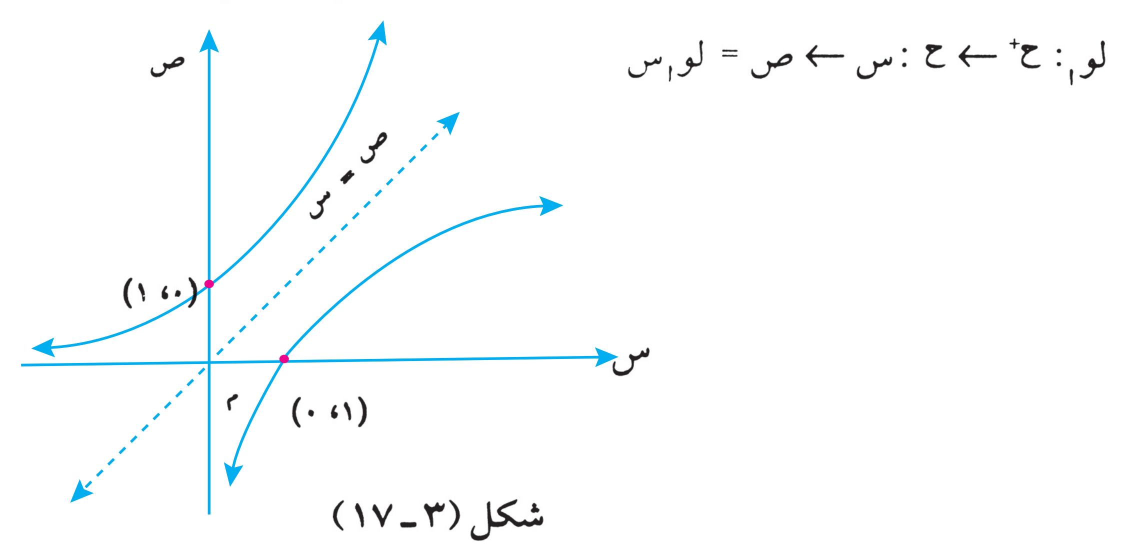
ص = لو_ا س ⟺ س = ا^ص　　　　　(٣-٦)

والرمز لو_ا س يُقرأ لوغاريتم س للأساس ا .

ويلاحظ في الشكل (٣-١٧) أنه بالتناظر حول المستقيم ص = س لمنحني الدالة ص = ا^س ، فإنّنا نحصل على المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية س = ا^ص ⟺ ص = لو_ا س .

ويلاحظ كذلك أنَّ الدالة اللوغاريتمية مجالها هو ح^+ ومجالها المقابل هو ح أي أن :

لو_ا : ح^+ ← ح : س ← ص = لو_ا س

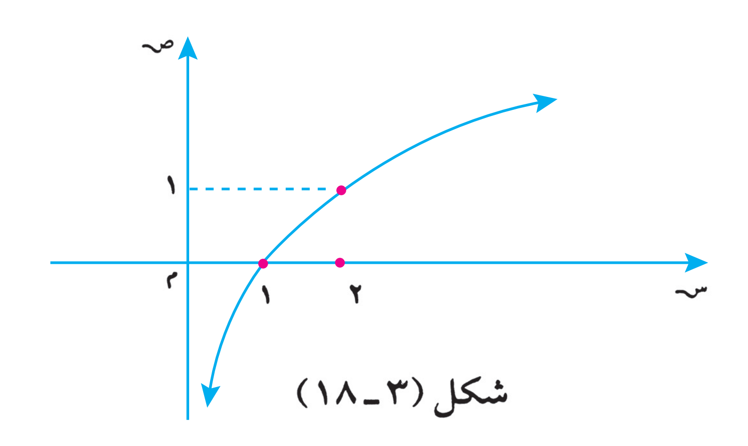


شكل (٣ـ١٧)

التمثيل البياني للدالة : ص = لو$_{هـ}$س = لو س ، $س > ٠$.

كما في الشكل (٣-١٨) .

مع ملاحظة أن لو$_{هـ}$س هو اللوغاريتم الطبيعي .



شكل (٣ ـ ١٨)

من دراستنا للدالة الأسية واللوغاريتمية نستخلص أنَّ كلا منهما دالة عكسية للأخرى ؛ وهذا ما رأيته في الصف الأول الثانوي .

تمارين (٣ – ١)

(١) أعد تعريف كل من الدوال الآتية وارسم المنحنى البياني لها :

(ا) د(س) = |س – ٥|

(ب) ر(س) = |س – ٥| + ٣

(حـ) ع(س) = |س٢ – ٤س – ٥|

(٢) عيِّن مجال كل من الدوال الآتية :

(ا) د(س) = (س + ١) / (س – ٤)　　(حـ) ف(س) = √(س٢ – ٣س + ٤)

(ب) ر(س) = √(٥ – س)　　(ى) هـ(س) = √((س + ٢) (٥ – س))

(٣) ارسم المنحنى البياني للدالة

د(س) = |س – ٣| + |س + ٣| + ٢

(٤) حدِّد الفترات التي تكون فيها كل من الدوال الآتية موجبة أو سالبة مع تمثيل ذلك على خط الأعداد .

(ا) د(س) = س٢ – س – ٦　　(حـ) ى(س) = س – ٣

(ب) ر(س) = (٥ – س) (س – ١)

(٥) ارسم الدالة ص = ٣^س وعيّن مجالها .

(٦) ارسم الدالة ص = لو٣ س وعيّن مجالها .

٣ - ٢ بعض خواص الدوال الحقيقية :

(١) الـدوال الـدوريـة :

نورد فيما يأتي مراجعة لما تعلمته حول هذا الموضوع في الصف الثاني الثانوي :

تعريف (٣-٤)

نسمّي الدالة د المعرَّفة على ح دالة دورية ذات دور ا إذا كان ا أصغر عدد حقيقي موجب بحيث :

د(س + ا) = د(س) لكلّ س ∈ ح

نعلم أنَّ :

جا (هـ + ٢ط) = جاهـ لكل هـ ∈ ح

جتا (هـ + ٢ط) = جتاهـ لكل هـ ∈ ح

وعليـه فإن الدالتين جـا ، جتـا دوريتان ودور كل منهما يسـاوي ٢ط لأنهما تحققان العـلاقتين أعلاه ولا يوجد عدد حقيقي موجب أقل من ٢ط يحقق هاتين العلاقتين .

وفي الأمثلة الآتية سنقدّم التمثيل البياني لهاتين الدالتين .

مثال (٣ - ٨)

ارسم المنحني الذي يمثّل الدالة :

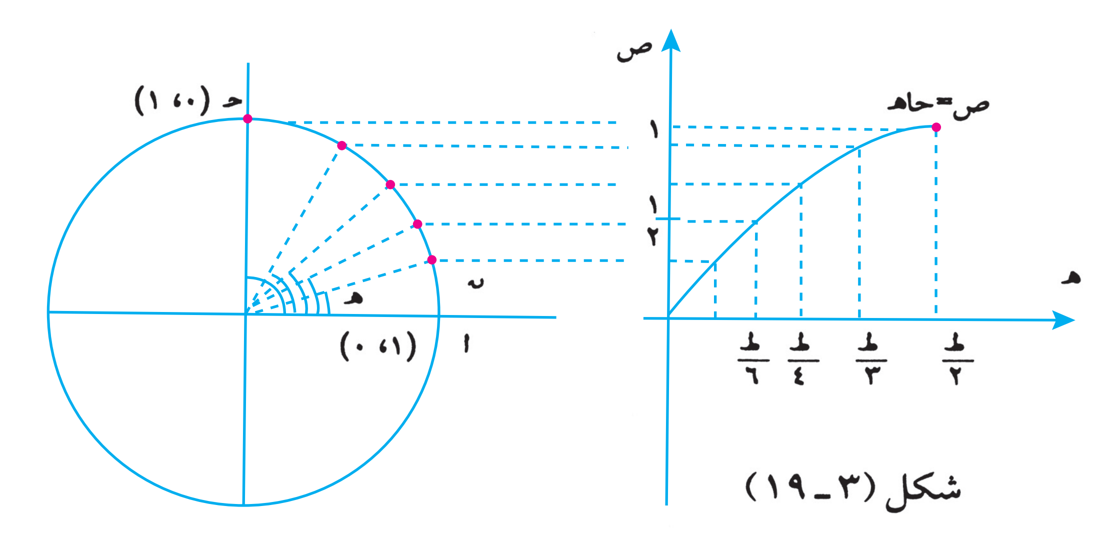
ص = جاهـ حيث ٠ ≥ هـ ≥ $\frac{ط}{٢}$

الحــل :

من دراستنا السابقة نشكل الجدول الآتي :

هـ	٠	$\frac{ط}{٦}$	$\frac{ط}{٤}$	$\frac{ط}{٣}$	$\frac{ط}{٢}$
جاهـ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢} \approx ٠,٧١$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢} \approx ٠,٨٦$	١

وهذه النقط مرسومة على مستوى الإحداثيات (هـ ، ص) في الشكل (٣-١٩).



شكل (٣ـ١٩)

لاحظ أن قيمـة الدالـة جاهـ هي الإحـداثي الصادي للنقطـة ن على دائرة الوحـدة، وأن هذا الإحداثي يتـزايد تـدريجيا من صفـر عندمـا تكون هـ = صفراً (أي عنـدما تنطبق ن على ا) إلى ١ عندما تصبح هـ = $\frac{ط}{٢}$ (أي عندما تنطبق ن على حـ). وبهذه الطريقة نكمـل المنحني على الفتـرة ٠ ≥ هـ ≥ $\frac{ط}{٢}$ برسم كل نقطة عليه على نفس ارتفاع النقطة المناظرة لها على دائرة الوحدة.

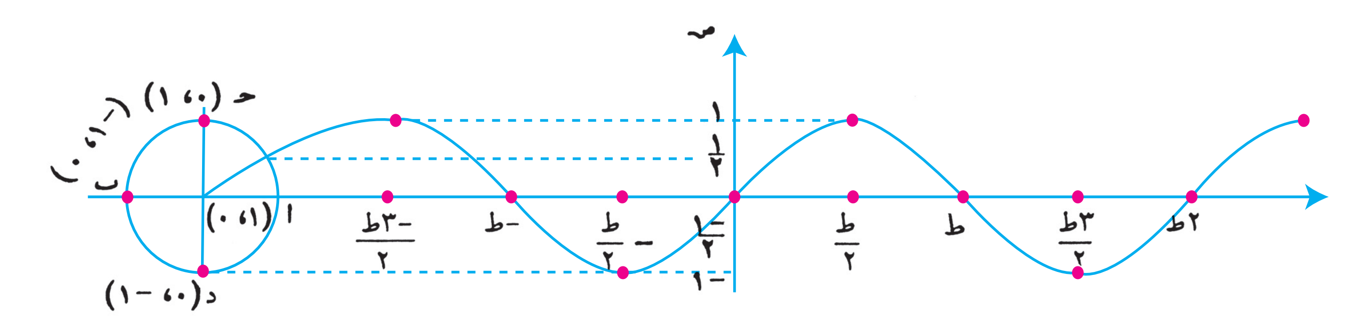
مثال (٣ – ٩)

ارسم المنحني الذي يمثّل الدالة:

ص = جاع حيث ع ∈ ح

الحـــل :

نتبع أسلوب المثال السابق ونحصل على الشكل (٣-٢٠).



شكل (٣ـ٢٠)

(١) منحني الدالة ص = جاهـ محصور في الفترة -١ ≤ ص ≤ ١، وهذا يتفق مع كـون مدى دالة الجيب هو [-١ ، ١].

(٢) هذا المنحني يكرر نفسـه خارج الفترة ٠ ≤ هـ ≤ ٢ط، بحيث يمكن الحصـول على بقية شكله بواسطة انسحابات بمسافة ٢ط أو مضاعفاتها إلى اليمين أو اليسار.

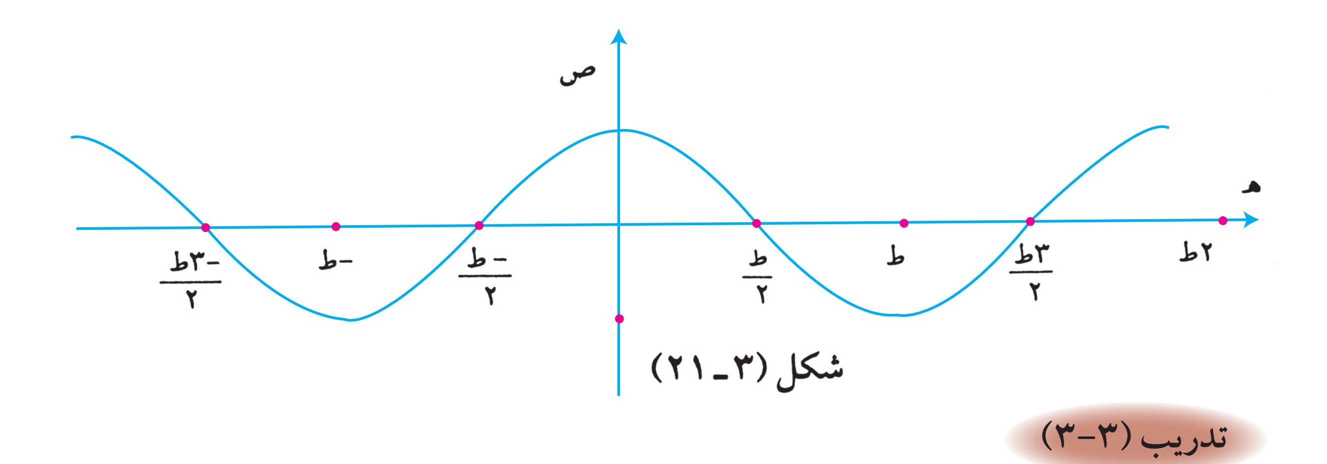
مثال (٣ - ١٠)

ارسم منحني الدالة :

ص = جتاس ، -٢ط ≤ س ≤ ٢ط .

الحـــل :

سبق أن علمنا أنّ جتاس = جا($\frac{ط}{٢}$ + س) ، ولذلك يمكن رسم منحني الجيب ثم سحبه في الاتجاه السالب لمحور السينات مسافة $\frac{ط}{٢}$ والمنحني مبيّن في الشكل (٣-٢١).



شكل (٣ـ٢١)

تدريب (٣-٣)

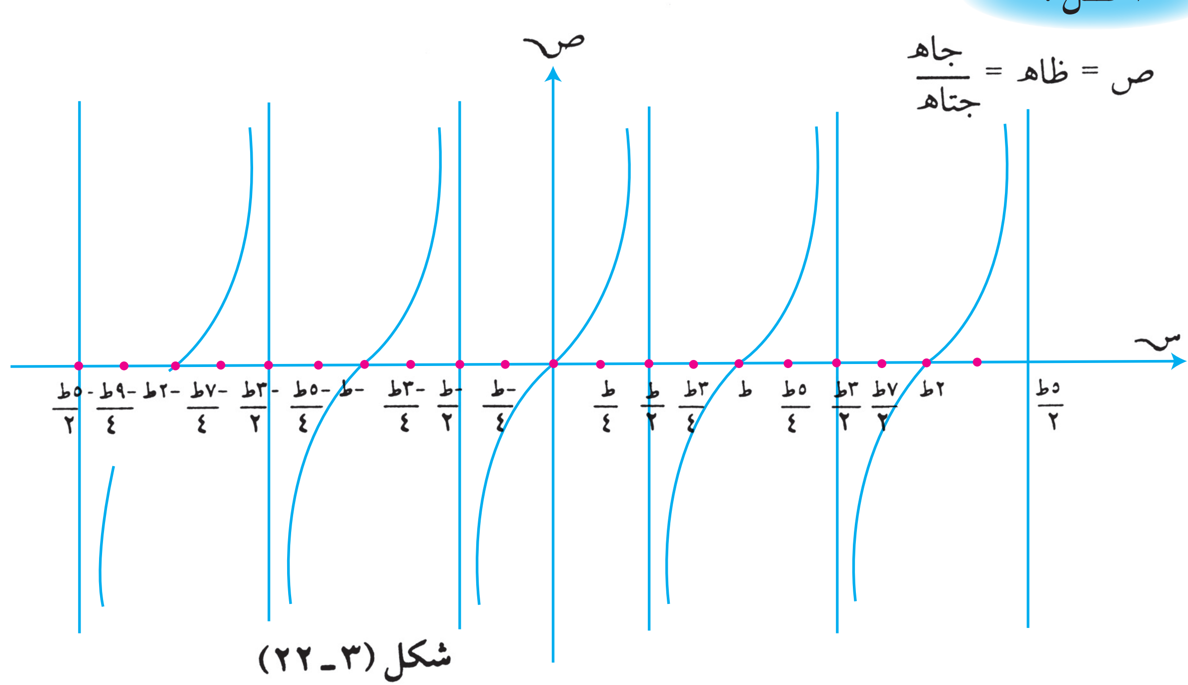
استنتج الرسم البياني لدالة جيب التمام بواسطة دائرة الوحدة كما فعلنا بالنسبة لدالة الجيب .

مثال (٣-١١)

ارسم الشكل البياني لمنحني دالة الظل .

الحل :

ص = ظاهـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$



شكل (٣ـ٢٢)

الشكل (٣-٢٢) يبين الشكل البياني لمنحني دالة الظل ولعلك تـلاحظ أن المنحني يكرر نفسه بعد مسافة مقدارها ط من اليمين أو اليسار (لماذا؟).

(٢) الـدوال الزوجية والـدوال الفردية :

تعريف (٣-٥) :

(١) الدالة د التي مجالها ف تسمى دالة زوجية إذا كان :

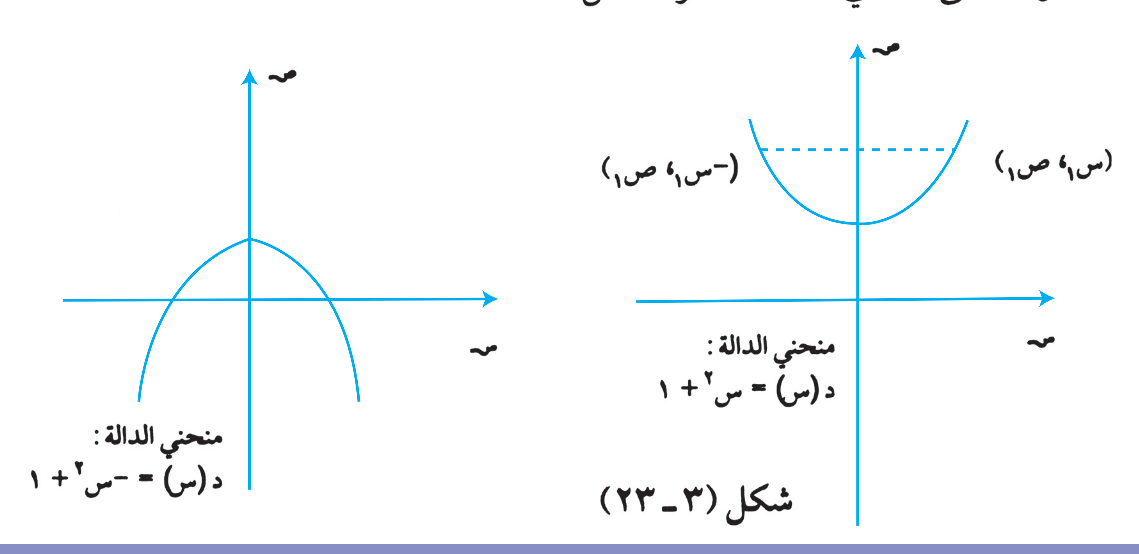
د(س) = د(-س) لكل س ، -س ∈ ف .

(٢) الدالة د التي مجالها ف تسمّى دالة فردية إذا كان :

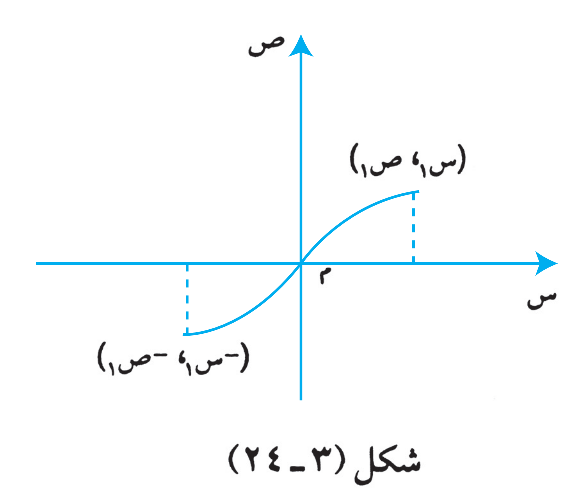
د(-س) = -د(س) لكل س ، -س ∈ ف .

ملحـوظة (٣ - ٤)

(١) المنحني البياني الممثّل للدالة الزوجية يكون متنـاظراً (متماثلاً) بالنسبة لمحور الصادات بمعنى أنّه إذا كـانت (س$_١$ ، ص$_١$) إحـدى نقط منحني الـدالة فإن النقطـة (-س$_١$ ، ص$_١$) تكون واقعة على المنحني كذلك. انظر الشكل (٣-٢٣).



شكل (٣-٢٣)



شكل (٣ ـ ٢٤)

(٢) المنحني البياني الممثّل للدالة الفردية يكون متنـاظراً (متماثلاً) بالنسبة لنقطة الأصل بمعنى أنه إذا كـانـت النقطـة (س١ ، ص١) إحـدى نقط منحني الـدالـة الفـرديـة فإنَّ النقطـة (−س١ ، −ص١) تكون إحدى نقط المنحني كذلك . انظر الشكل (٣−٢٤) .

ويكون متناظراً (متماثـلاً) بالنسبة لنقطة ا إذا أمكن اختيار النقطة ا على المنحني بحيث لو دار المنحني في مستويه بزاوية مقدارها ١٨٠° وفي أي اتجاه فإنه يعود إلى مكانه السابق دون أي إزاحة .

مثال (٣−١٢)

أيّ من الدوال الآتية فردية وأيّها زوجية :

(ا) د(س) = س^٤ جتاس

(ب) د(س) = ظاس على الفترة $(-\frac{ط}{٢} ، \frac{ط}{٢})$.

(حـ) د(س) = س^٢ − ٣س + ٢

الحـــل :

(أ) د(س) = س^{٤} جتاس

د(−س) = (−س)^{٤} جتا(−س)

= س^{٤} جتاس

= د(س)

إذن د دالة زوجية ، لأن د(س) = د(−س)

(ب) د(س) = ظاس ، س ∈ (−$\frac{ط}{٢}$، $\frac{ط}{٢}$)

د(−س) = ظا(−س)

= − ظاس

= − د(س)

إذن د دالة فردية ، لأن د(−س) = − د(س) .

(جـ) د(س) = س^{٢} − ٣س + ٢

د(−س) = س^{٢} + ٣س + ٢

−د(س) = −س^{٢} + ٣س − ٢

أي أن د ليست زوجية وليست فردية ، لأن :

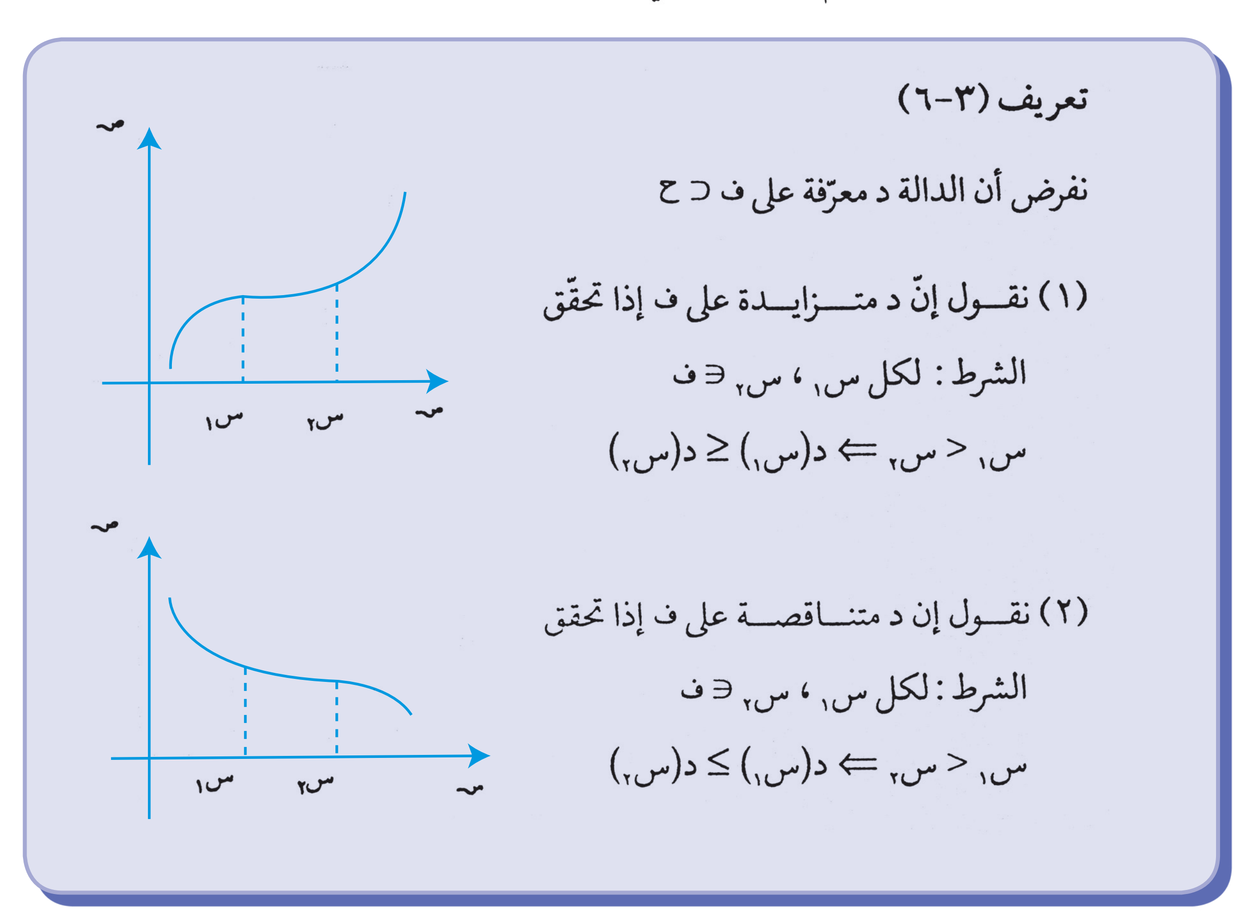
د(−س) ≠ د(س) وَ د(−س) ≠ −د(س) .

ملحـوظة (٣ − ٥)

لاحظ أن كثيراً من الدوال ليست فردية وليست زوجية .

(٣) الـدوال المطـردة :

لدراسة اطِّراد الدوال نقدم التعريف الآتي :



تعريف (٣-٦)

نفرض أن الدالة د معرّفة على $ف \subset ح$

(١) نقــول إنّ د متــــزايـــدة على ف إذا تحقّق

الشرط : لكل $س_1 ، س_2 \in ف$

$س_1 < س_2 \Leftarrow د(س_1) \leq د(س_2)$

(٢) نقــول إن د متنـــاقصـــة على ف إذا تحقق

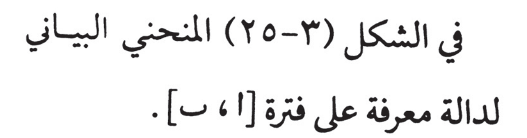
الشرط : لكل $س_1 ، س_2 \in ف$

$س_1 < س_2 \Leftarrow د(س_1) \geq د(س_2)$

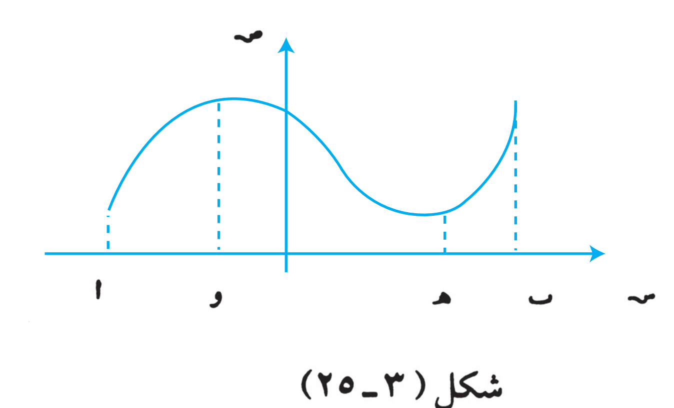
في الفقرة (١) من التعريـف أعلاه إذا كان $د(س_1) < د(س_2)$ فتسمى الدالة د متـزايدة فعلاً .
وفي الفقرة (٢) من التعريف ، إذا كان $د(س_1) > د(س_2)$ فتسمى د متناقصة فعلاً .

ولبحث اطِّراد دالة نحدِّد الفترات من مجالها والتي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة .

مثال (٣-١٣)



في الشكل (٣-٢٥) المنحني البيـاني لدالة معرفة على فترة [ا ، ب] .



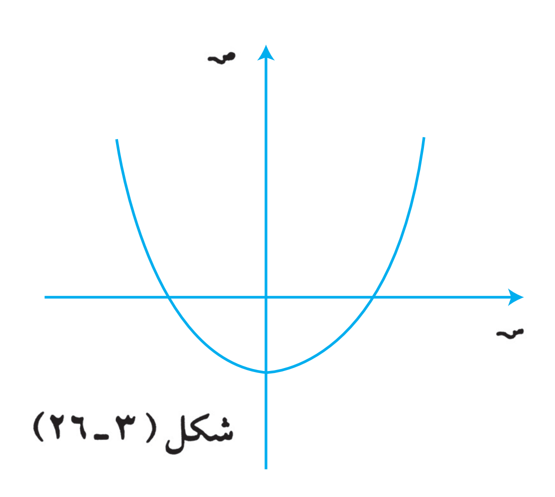
شكل (٣ـ٢٥)

لاحظ في هذه الـدالة أنها متـزايدة في الفترة [ا ، و]، متناقصـة في الفترة [و ، هـ] ثم متزايدة في الفترة [هـ ، ب] .

مثال (٣- ١٤)

ابحث اطراد الدالة

د(س) = $س^{٢}$ ـ ١ لكل س ∋ ح



شكل (٣ـ٢٦)

الحل :

نفرض أن $س_{١}$ ، $س_{٢}$ في ح ، $س_{١} > س_{٢}$.

إذن : د($س_{١}$) - د($س_{٢}$)

= ($س_{١}^{٢}$ - ١) - ($س_{٢}^{٢}$ - ١)

= $س_{١}^{٢}$ - $س_{٢}^{٢}$ (٣-٧)

(١) في الفترة [٠ ، ∞)

$س_١ < س_٢ \Leftarrow س_١^٢ < س_٢^٢$ من خصائص الأعداد الحقيقية الموجبة

$\Leftarrow د(س_١) - د(س_٢) < صفر$ من (٣-٧)

$\Leftarrow د(س_١) < د(س_٢)$

$\Leftarrow$ د متزايدة في [٠ ، ∞)

(انظر الشكل (٣-٢٦)).

(٢) في الفترة (-∞ ، ٠]

$س_١ < س_٢ \Leftarrow س_١^٢ > س_٢^٢$ (لماذا؟)

$\Leftarrow د(س_١) - د(س_٢) > صفر$ من (٣-٧)

$\Leftarrow د(س_١) > د(س_٢)$

$\Leftarrow$ د متناقصة في (-∞ ، ٠]

(انظر الشكل (٣-٢٦)).

ملحوظة (٣ - ٦)

لكل $س_١$ ، $س_٢ \in ح$ ، $س_١ < س_٢$ ، ن $\in$ ط فإن :

(١) $س_١ > ٠$ ، $س_٢ > ٠ \Leftarrow س_١^ن < س_٢^ن$

(٢) $س_٢ < ٠$ ، $س_١ < ٠ \Leftarrow$ $\begin{cases} س_١^ن > س_٢^ن & \text{إذا كانت ن زوجية .} \\ س_١^ن < س_٢^ن & \text{إذا كانت ن فردية .} \end{cases}$

(٤) الدوال المحدودة :

تعريف (٣-٧) :

نقول إنّ الدالة د التي مجالها ف محدودة من أعلى إذا وجد عدد حقيقي ل بحيث :

د(س) ≤ ل لكل س ∈ ف ويسمّى العدد ل حدًّا علويًّا للدالة د .

تعريف (٣-٨) :

نقول إن الدالة د التي مجالها ف محدودة من أسفل إذا وجد عدد حقيقي م بحيث :

د(س) ≥ م لكل س ∈ ف ويسمّى العدد م حدًّا سفليًّا للدالة د .

لاحظ أنه في التعريفين (٣-٧)، (٣-٨) لم يشترط أن تكون ل أو م منتمية لمدى الدالة د .

مثال (٣-١٥)

عيّن ما إذا كانت الدالة : د(س) = ٣س + ٢ محدودة من أعلى ومن أسفل في الفترة [٠ ، ٢] .

الحـل :

لكلّ س ∈ المجال [٠ ، ٢] فإنَّ :

٠ ≤ س ≤ ٢ ⇐ ٠ ≤ ٣س ≤ ٦

⇐ ٢ ≤ ٣س + ٢ ≤ ٨

د محدودة من أسفل بالعدد ٢ (أو أي عدد أصغر من ٢) (١)

$\Leftarrow$

د محدودة من أعلى بالعدد ٨ (أو أي عدد أكبر من ٨) (٢).

(١) يعني أنَّ كل عدد حقيقي أصغر من ٢ يعد أيضاً حدًّا سفليًّا للدالة بالإضافة إلى العدد ٢، مثل الأعداد ١,٧٥ ، ١,٥ ، ١,٤٩ ، . . .

(٢) يعني أنَّ كل عدد حقيقي أكبر من ٨ يعد أيضاً حدًّا علويًّا للدالة بالإضافة إلى العدد ٨، مثل الأعداد ٨,١ ، ٨,١٥ ، . . . . ، ٩ ، . . . .

وواضح من هذا المثال أنّ الحد العلوي أو الحد السفلي للدالة د قد ينتمي وقد لا ينتمي لمدى الدالة د الذي يساوي [٢ ، ٨].

تعريف (٣-٩):

نقول إنّ الدالة د التي مجالها ف محدودة إذا كانت محدودة من أعلى وكذلك محدودة من أسفل.

التعريف (٣-٩) يعني أنَّ د تكون محدودة إذا وجد عددان حقيقيان ل ، م بحيث:

م ≥ د(س) ≥ ل لكل س ∈ ف (٣-٨)

وفي هذه الحالة فإنّ:

|د(س)| ≤ ك لكل س ∈ ف (٣-٩)

حيث ك = أكبر (|ل|، |م|)

مثال (٣-١٦)

أثبت أنَّ الدالة د(س) = $\frac{٤}{٣}$ س + $\frac{١}{٣}$ محدودة في الفترة [-٤ ، ٢].

الحـــل :

تجد بسهولة أنَّ مدى هذه الدالة = [-٥ ، ٣] .

⟸ د(س) ≤ ٣ لكل س ∈ ف ⟸ د محدودة من أعلى .

د(س) ≥ -٥ لكل س ∈ ف ⟸ د محدودة من أسفل .

أي أنَّ د محدودة حسب التعريف (٣-٩) .

ولعلَّك تلاحظ أنَّ: -٥ ≤ د(س) ≤ ٣ لكل س ∈ ف

فهي إذن محدودة حسب الشرط (٣-٨) .

ولإيجاد ك > ٠ التي تحقّق الشرط (٣-٩) .

فإنَّ : |-٥| = ٥ ، |٣| = ٣

ك = أكبر (|- ٥| ، |٣|) = ٥

أي أنَّ |د(س)| ≤ ٥ لكل س ∈ ف .

مثال (٣-١٧)

هل الدالة د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ محدودة .

الحـــل :

د معرَّفة بشرط س ≥ صفراً ⟺ مجال د [٠ ، ∞) .

كما أنَّ مدى د = [٠ ، ∞) .

هذه الدالة محدودة من أسفل لأنَّ :

د(٠) = ٠ ≤ د(س) لكل س ∈ [٠ ، ∞) = ف .

ولكن الدالة ليست محدودة من أعلى لأنه لا يوجد عدد حقيقي ل، بحيث : د(س) $\geq$ ل

لكل س $\in$ ف = [٠ ، ∞) . إذن د ليست محدودة حسب التعريف (٣-٩) .

مثال (٣- ١٨)

من معلوماتنا في حساب المثلثات نعلم أنَّ :

-١ $\leq$ جاس $\leq$ ١ ، -١ $\leq$ جتاس $\leq$ ١ لكل س $\in$ ح

أي أن |جاس| $\leq$ ١ ، |جتاس| $\leq$ ١ لكل س $\in$ ح

وهذا يعني أن كلاً من دالتي الجيب وجيب التمام محدودة في ح .

مثال (٣- ١٩)

أثبت أن الدالة :

د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ١}$ محدودة لكل س $\in$ ح .

الحـــل :

لكل س $\in$ ح فإن : س٢ $\geq$ صفراً .

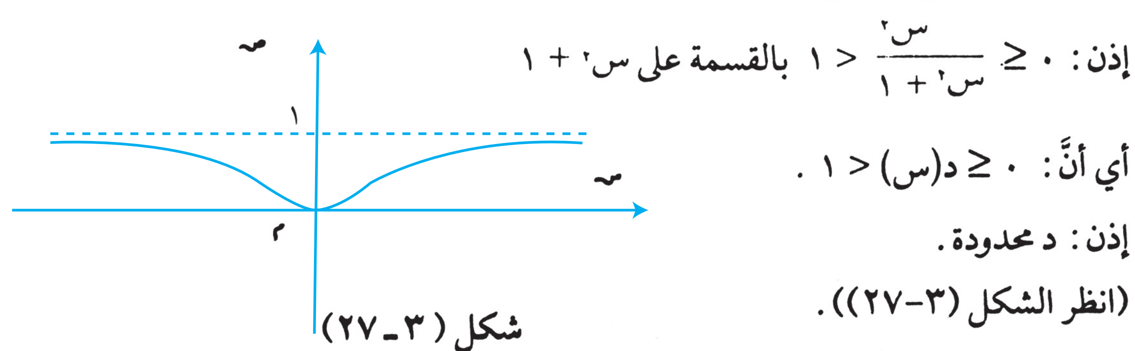
كذلك : ٠ $\leq$ س٢ $<$ س٢ + ١ .

إذن : ٠ $\leq$ $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ١}$ $<$ ١ بالقسمة على س٢ + ١

أي أنَّ : ٠ $\leq$ د(س) $<$ ١ .

إذن : د محدودة .

(انظر الشكل (٣-٢٧)) .



شكل (٣-٢٧)

ولعلّك تلاحظ هنا أنَّ د لن تبلغ حدّها العلوي .

مثال (٣-٢٠)

أثبت أن الدالة $د(س) = \frac{٢}{١ + س}$ جاس ، س ≤ ٠ محدودة باعتبار أن مجالها هو [٠ ، ∞) .

الحــل :

$|د(س)| = |\frac{٢}{١ + س}| \, |جاس|$

$\leq |\frac{٢}{١ + س}|$ لأن $|جاس| \leq ١$

≤ ٢ لأن ١ + س ≤ ١ لكل س ∈ [٠ ، ∞) .

إذن د محدودة في [٠ ، ∞) .

مثال (٣-٢١)

أثبت أن الدالة :

$د(س) = س^٢ - ٤س + ٣$ محدودة على [١ ، ٢] .

الحــل :

$د(س) = س^٢ - ٤س + ٣ = (س - ٢)^٢ - ١$ بإكمال المربع بالنسبة إلى س

لكل س ∈ [١ ، ٢] فإن :

$١ \leq س \leq ٢ \Leftrightarrow ١ - ٢ \leq س - ٢ \leq ٢ - ٢$

$\Leftarrow -١ \leq س - ٢ \leq ٠$

$\Leftarrow ٠ \leq ٢ - س \leq ١$ بالضرب × (-١)

$\Leftarrow ٠ \leq (٢ - س)^٢ \leq ١$ بالتربيع

$\Leftarrow ٠ - ١ \leq (٢ - س)^٢ - ١ \leq ١ - ١$

$\Leftarrow -١ \leq (س - ٢)^٢ - ١ \leq ٠$ لأن $(٢ - س)^٢ = (س - ٢)^٢$

$\Leftarrow -١ \leq د(س) \leq ٠$

$\Leftarrow$ د محدودة على [١ ، ٢] .

تمارين (٣ – ٢)

(١) بيِّن أي الدوال الآتية زوجية وأيها فردية :

(أ) د(س) = س٢ + ٥ (ب) ر(س) = $\sqrt{}$س٢ + ٥

(جـ) هـ(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{٣ - \text{س}}$ (د) ف(س) = س|س|

(٢) ارسم منحنى الدالة ص = جاس حيث س ∈ ح ، –٢ط ≤ س ≤ ٢ط ، وعلى الشكل نفسه ارسم منحنى الدالة ص = ٢جاس .

(٣) ارسم منحنى الدالة ص = جتاس حيث س ∈ ح ، – ٢ط ≤ س ≤ ٢ط ، ثم ارسم منحنى الدالة ص = $\frac{١}{٢}$ جتاس على الشكل نفسه .

ابحث تزايد وتناقص الدوال الآتية على الفترات المبينة أمام كل منها :

(٤) د(س) = ٣س + ٥ لكل س ∈ ح .

(٥) د(س) = س|س| لكل س ∈ ح .

(٦) د(س) = س٣ – ٣ لكل س ∈ ح .

(٧) د(س) = |س – ٣| لكل س ∈ ح .

(٨) د(س) = جاس لكل س ∈ [٠ ، $\frac{\text{ط}}{٢}$] .

لكل من الدوال الآتية ابحث هل هي محدودة أو لا ؟

(٩) د(س) = $\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ + ٤}$ لكل س ∈ ح .

(١٠) د(س) = ٥ – ٢س ، –٥ ≤ س ≤ –٣ .

(١١) د(س) = ٥س − ٤ ، −١ ≤ س ≤ ٤ .

(١٢) د(س) = (س + ٢)^{٢} + ٥ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ .

(١٣) د(س) = (س − ٣)^{٢} − ٥ ، ٣ ≤ س ≤ ٥ .

(١٤) د(س) = $\frac{\text{٥}}{\text{١ + س}}$ جتاس ، س ≥ ٠ .

(١٥) د(س) = $\frac{\text{٢}}{\text{س + ٤}}$ جاس ، س < ٠ .

(١٦) د(س) = $\frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} \text{ + ٤}}}$ لكل س ∈ ح .

٣ - ٣ المفهـوم الحدسـي لنهاية دالـة حقيـقية عند نقـطة

نعالج في هـذا البند، بشكل حـدسي ومن خلال الأمثلة، مفهـوم النهاية لـدالة حقيقيـة عند نقطة . هذا المفهوم يشكل ركيزة أساسية لا غنى عنها لدراسة بقية الأبواب في هذا الكتاب .

مثال (٣-٢٢)

لتكن الدالة د المعرَّفـة بالقاعدة : د(س) = ٢س - ١ والمطلوب دراسة سلوك الـدالة د عندما تقترب س من القيمة ٢ دون أن تساويها .

الحـــل :

مجال الدالة د(س) = ح

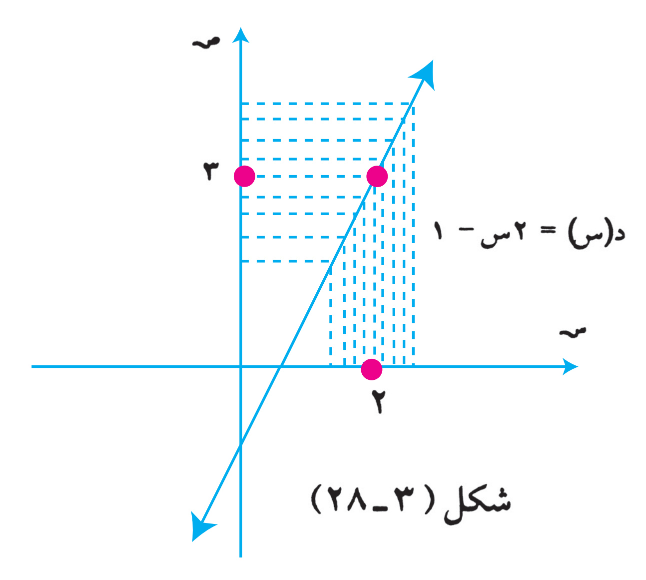
عندما تكـون س قريبة من العدد ٢ ولكنهـا غير مساوية لِـ ٢ ، فإنَّ الجدول التـالي يبيّن لنا قيمة الدالة د عندما تقترب س من العدد ٢ من اليسار أي من خلال قيم أقل من ٢ :

س < ٢	١,٧	١,٨	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	...
د(س)	٢,٤	٢,٦	٢,٨	٢,٩٨	٢,٩٩٨	...

الجدول (٣ - ١) : عندما تقترب س من العدد ٢ من اليسار أي بقيم متزايدة .

نلاحظ أنَّ قيمة الدالة د تقترب من العدد ٣ بقـدر ما نريد، وذلك بجعل قيمة س (س < ٢) قريبة من العدد ٢ بقدر كافٍ .

انظر الشكل (٣-٢٨) .



شكل (٣ـ٢٨)

نلخّص الاستنتاج الذي توصّلنا إليه بقولنا :

إنَّ العدد ٣ هو نهاية الدالة د عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار.

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا بالصورة :

$$\lim_{س \leftarrow ٢^-} د(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^-} (٢س - ١) = ٣ \qquad (٣-١٠)$$

من ناحية أخرى الجدول التالي يبيّن لنا قيمة الدالة د عندما تقترب س من العدد ٢ من اليمين، أي من خلال قيم أكبر من ٢ :

س > ٢	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	...
د(س)	٣,٦	٣,٤	٣,٢	٣,٠٢	٣,٠٠٢	...

الجدول (٣ - ٢) : عندما تقترب س من العدد ٢ من اليمين أي بقيم متناقصة .

نلاحظ أنّ قيمة الدالة د تقترب من العدد ٣ بقدر ما نريد وذلك بجعل قيمة س (س > ٢) قريبة من العدد ٢ بقدر كافٍ. انظر الشكل (٣-٢٨)، في هذه الحالة نقول إن العدد ٣ هو نهاية الدالة د عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين، ونعبر عن ذلك رياضيًّا بالصورة:

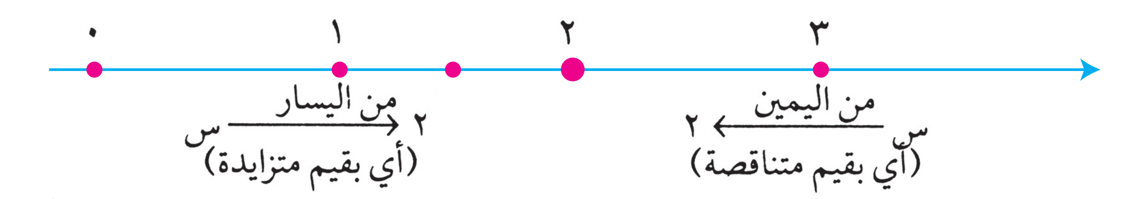
$$\text{نها}_{س \leftarrow ٢^+} د(س) = \text{نها}_{س \leftarrow ٢^+} (٢س - ١) = ٣ \qquad (٣-١١)$$

من (٣-١٠) و (٣-١١) نلاحظ أنّ نهاية الدالة د عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار أو جهة اليمين تساوي ٣.

وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية الدالة د عندما تقترب س من العدد ٢ موجودة وتساوي ٣، ونكتب ذلك على الصورة التالية:

$$\text{نها}_{س \leftarrow ٢} د(س) = \text{نها}_{س \leftarrow ٢} (٢س - ١) = ٣$$

ولعلّك تتفهّم ما نقصده بقولنا إن س ← ٢ (من اليمين أو من اليسار) وذلك بالرجوع إلى تمثيل هذه القيم على خط الأعداد أدناه:



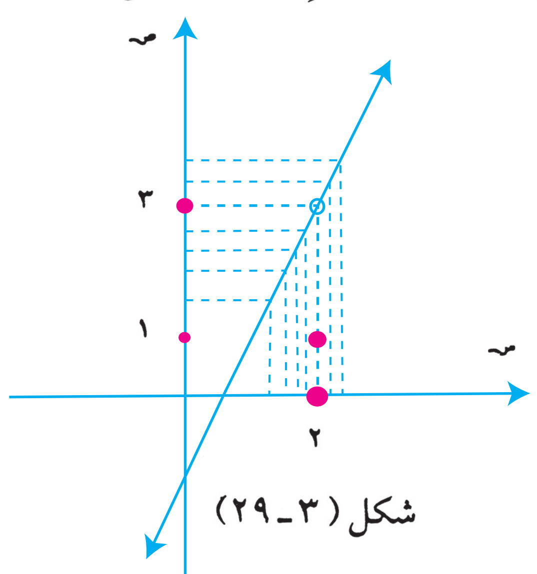
مثال (٣-٢٣)

لنعتبر الدالة المعرّفة كما يلي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} - ١ & \text{عندما س} \neq ٢ \\ ١ & \text{عندما س} = ٢ \end{cases}$$

مجال الدالة د(س) = ح ، لاحظ أنَّ د(٢) = ١ .

والآن نود أن نـدرس سلوك الدالة د عنـدما تقترب س من العدد ٢ من جهـة اليسار. من أجل ذلك انظـر الجدول (٣–١) ستلاحظ أنَّ قيمـة الدالة د تقترب مـن العدد ٣ بقـدر ما نريـد وذلك بجعل قيمة س قريبة من العدد ٢ بقدر كافٍ . انظر الشكل (٣–٢٩) .



شكل (٣ـ٢٩)

إذن نهاية الدالة د عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار $(\text{س} < ٢)$ تساوي ٣ أي أنّ :

$$\lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{د(س)} = \lim_{\text{س} \to ٢^-} (٢\text{س} - ١) = ٣ \qquad (٣–١٢)$$

وبالمثـل إذا أردنا دراسـة تصرّف الدالــة د عندما تقتـرب س من العـدد ٢ من جهة اليمين، $(\text{س} > ٢)$ انظر الجدول (٣–٢) ستـلاحظ أن قيمة الـدالة د تقترب من العدد ٣ بقـدر ما نـريد، وذلك بجعل قيمة س قريبة من العدد ٢ بقدر كافٍ . انظر الشكل (٣–٢٩) .

إذن نهاية الدالة د عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين (س > ٢) تساوي ٣، أي أن:

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^+} \text{د(س)} = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^+} (٢\text{س} - ١) = ٣ \qquad (٣-١٢)$$

من (٣-١١) و (٣-١٢) نلاحظ أنَّ:

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^-} \text{د(س)} = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^+} \text{د(س)} = ٣$$

إذن: $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{د(س)} = ٣ \neq \text{د(٢)} = ١$

مثال (٣-٢٤)

لتكن الدالة د المعرّفة كما يلي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ٥ - \text{س} &، \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} + ٢ &، \text{س} > ١ \end{cases}$$

مجال د = ح − { ١ }

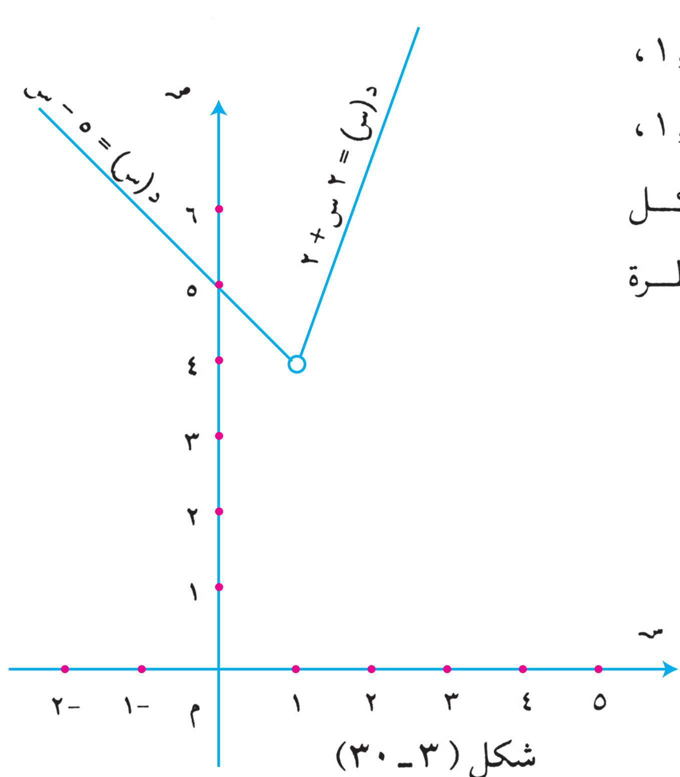
وبالتالي فإن الدالة د معرّفة على يمين الواحد الصحيح مباشرة وأيضاً على يسار الواحد الصحيح مباشرة. انظر الشكل (٣-٣٠).

والآن نود أن ندرس تصـرف الدالة د عندما تقترب س من الواحد الصحيح من جهة اليمين.

من أجل ذلك نكوّن جدولاً:

تأخذ فيه س القيم ٢، ١,٧٥، ١,٥، ١,٢٥، ١,١، ١,٠١، ١,٠٠١، . . . ونحسب في كل حالة قيمة د(س) المناظرة مستخدمين في ذلك القاعدة :

د(س) = ٢س + ٢ .



شكل (٣ ـ ٣٠)

فنحصل على الجدول التالي :

س	٢	١,٧٥	١,٥	١,٢٥	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	١,٠٠٠٠١
د(س)	٦	٥,٥	٥	٤,٥	٤,٢	٤,٠٢	٤,٠٠٢	٤,٠٠٠٢	٤,٠٠٠٠٢

الجدول (٣ - ٣) : س تقترب من الواحد من اليمين (أي بقيم متناقصة) .

من هذا الجدول يتَّضح ما يلي :

إذا كانت س = ١,١ (أي أن س - ١ = ٠,١) فإن د(س) - ٤ = ٠,٢ .

وإذا كانت س = ١,٠١ (أي أن س - ١ = ٠,٠١) فإن د(س) - ٤ = ٠,٠٢ .

وإذا كانت س - ١ = ٠,٠٠١ فإن د(س) - ٤ = ٠,٠٠٢ .

وهكذا يتضح أنّه يمكن جعل الفرق بين د (س)، ٤ صغيراً بقدر ما نريد وذلك باختيار الفرق س - ١ صغيراً صغراً مناسباً وموجباً، وبمعنى آخر فإننا نستطيع أن نجعل د(س) - ٤ صغيراً صغراً كافياً وذلك بجعل القيمة س - ١ صغيرة وموجبة.

في هذه الحالة نقول إن الدالة د تقترب من ٤ عندما تقترب س من الواحد الصحيح من جهة اليمين (أي بقيم تتناقص باتجاه الواحد الصحيح).

وبالمثل إذا أردنا دراسة تصرُّف الدالة د عندما تقترب س من اليسار من الواحد الصحيح، فإننا نكوّن جدولاً تأخذ فيه س القيم ٠ ، ٠,٢٥ ، ٠,٥ ، ٠,٧٥ ، ٠,٩ ، ٠,٩٩ ، ٠,٩٩٩ ، . . . ونحسب في كل حالة قيمة د(س) المناظرة، وذلك باستخدام القاعدة د(س) = ٥ - س فنحصل على الجدول التالي :

س	٠	٠,٢٥	٠,٥	٠,٧٥	٠.٩	٠,٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩٩٩
د(س)	٥	٤,٧٥	٤,٥	٤,٢٥	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	٤,٠٠٠١

الجدول (٣ - ٤): س تقترب من الواحد من اليسار (أي بقيم متزايدة)

ومن هذا الجدول يتضح ما يلي :

إذا كانت س = ٠,٩ (أي أن ١ - س = ٠,١) فإن د(س) - ٤ = ٠,١ .

وإذا كان ١ - س = ٠,٠١ فإن د(س) - ٤ = ٠,٠١ .

وإذا كان ١ - س = ٠,٠٠١ فإن د(س) - ٤ = ٠,٠٠١ .

وهكذا يتضح أن د(س) - ٤ يمكن جعلها صغيرة بقدر ما نشاء، وذلك بجعل الفرق ١ - س صغيراً وموجباً.

وهكذا يتضح أنّه يمكن جعل القيمة المطلقة | د(س) − ٤ | صغيرة بالقدر الذي نريد، وذلك بجعل | س − ١ | صغيراً بقدر كافٍ. لذا نقول إن الدالـة د تسعى نحو العدد ٤ عندما تقترب قيم المتغير س من الواحـد، أو نقول إن نهاية الدالـة تساوي العدد ٤ عندمـا تقترب قيم متغيرها س من الواحد.

نمثل ذلك بالرمز : نـهـا (س ← ١) د(س) = ٤

مثال (٣− ٢٥)

لنعتبر الدالة المعرّفة كما يلي :

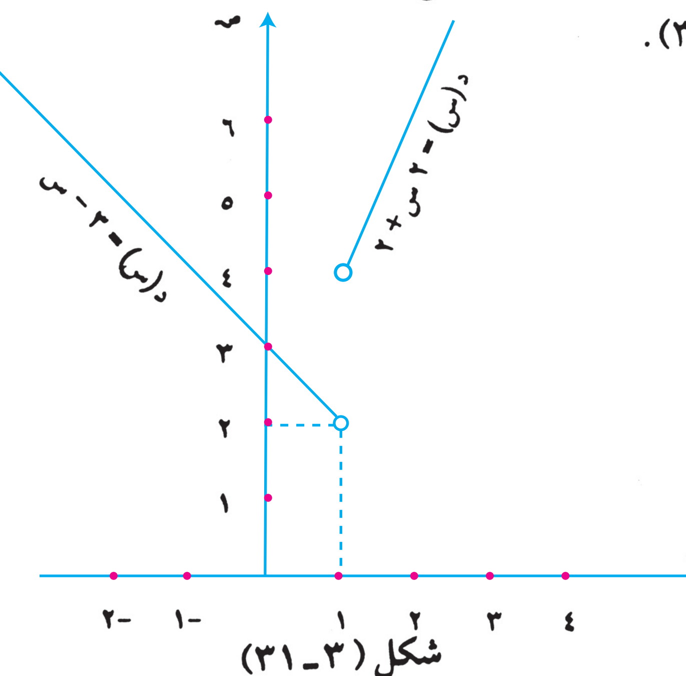
د(س) = { ٣ − س ، س < ١
 ٢س + ٢ ، س > ١

مجال د = ح − { ١ }

وبـالتالي فإن الـدالة د معـرفـة على يمين الواحـد الصحيح مبـاشرة وأيضاً على يسـار الواحـد الصحيح مباشرة. انظر الشكل (٣−٣١).

والآن نود أن ندرس تصرف الدالة د عنـدمـا تقترب س من الـواحـد الصحيح من جهة اليمين.

من أجـل ذلك نكـوّن جـدولاً تأخـذ فيـه س القيم ٢ ، ١,٧٥ ، ١,٥ ، ١,٢٥ ، ١,١ ، ١,٠١ ، ١,٠٠١ ، ١,٠٠٠١، . . .



شكل (٣ـ ٣١)

ونحسب في كل حالة قيمة د(س) المناظرة مستخـدمين في ذلك القاعدة د(س) = ٢س + ٢ فنحصل على الجدول التالي :

س	٢	١,٧٥	١,٥	١,٢٥	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	١,٠٠٠٠١
د(س)	٦	٥,٥	٥	٤,٥	٤,٢	٤,٠٢	٤,٠٠٢	٤,٠٠٠٢	٤,٠٠٠٠٢

الجدول (٣ - ٥) : س ← ١ من اليمين أي : س ← ١+

من هذا الجدول يتضح ما يلي :

اذا كانت س = ١,١ (أي أن س - ١ = ٠,١) فإن د(س) - ٤ = ٠,٢ .

وإذا كانت س = ١,٠١ (أي أن س - ١ = ٠,٠١) فإن د(س) - ٤ = ٠,٠٢ .

وإذا كانت س - ١ = ٠,٠٠١ فإن د(س) - ٤ = ٠,٠٠٢ .

وهكذا يتضح أنـه يمكن جعل الفرق بين د(س) ، ٤ صغيراً بالقـدر الذي نـريد وذلك بجعل القيمة س - ١ صغيرة وموجبة .

وبالمثل إذا أردنا دراسة قيمة الدالة د عندما تقترب س من الواحد الصحيح من خلال قيم أقل من الـواحد الصحيح فـإننا نكـوّن جـدولاً تأخذ فيـه س القيم ٠ ، ٠,٢٥ ، ٠,٥ ، ٠,٧٥ ، ٠,٩ ، ٠,٩٩ ، ٠,٩٩٩ ، . . . ونحسب في كل حالـة قيمة د(س) المناظرة وذلـك باستخدام القاعدة د(س) = ٣ - س فنحصل على الجدول التالي :

س	٠	٠,٢٥	٠,٥	٠,٧٥	٠,٩	٠.٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩٩٩
د(س)	٣	٢,٧٥	٢,٥	٢,٢٥	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١

الجـدول (٣ - ٦) : س ← ١ من اليسار أي : س ← ١-

من هذا الجدول يتضح ما يلي :

إذا كانت س = ٠,٩ (أي أن ١ - س = ٠,١) فإن د(س) - ٢ = ٠,١ .

وإذا كان ١ - س = ٠,٠١ فإن د(س) - ٢ = ٠,٠١ .

وإذا كان ١ - س = ٠,٠٠١ فإن د(س) - ٢ = ٠,٠٠١ .

وهكذا يتضح أن د(س) - ٢ يمكن جعلها صغيرة بقدر ما نشاء وذلك بجعل الفرق ١ - س صغيراً وموجباً .

نلاحظ مما تقدم أنه عندما تقترب قيم المتغير س من الواحد عن اليمين فإن قيم الدالة د تقترب من العدد ٤ ، وعندما تقترب قيم المتغير س من الواحد عن اليسار فإن قيم الدالة د لا تقترب من العدد ٤ بل تقترب من عدد آخر هو العدد ٢ . من أجل هذا نقول : ليس للدالة المذكورة نهاية عندما تقترب قيم متغيرها س من الواحد .

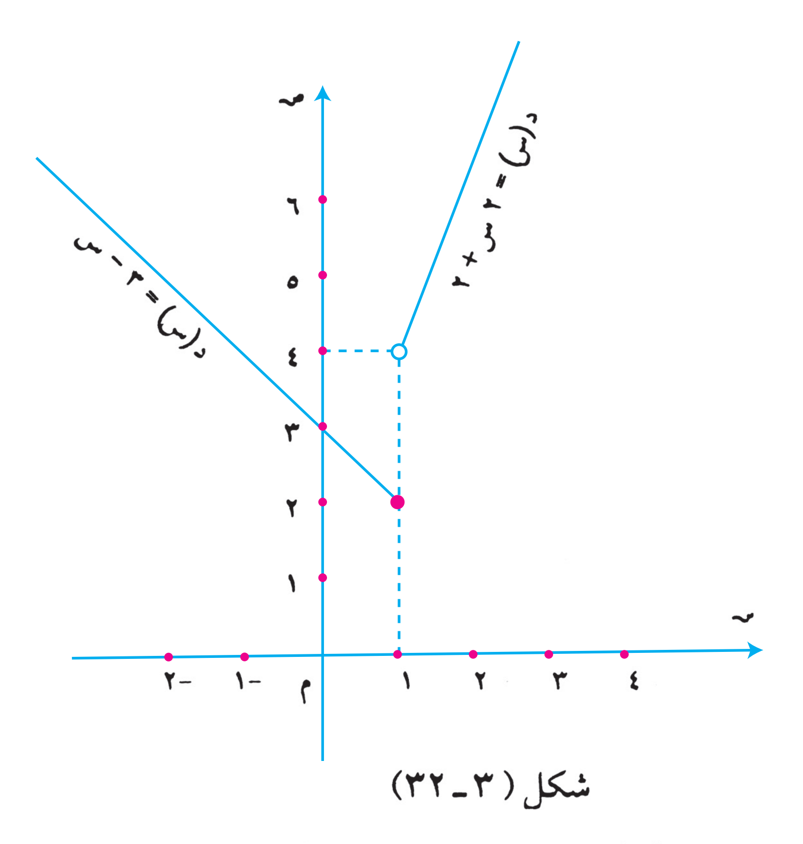
مثال (٣- ٢٦)

لنعتبر الدالة المعرفة كما يلي :

$$د(س) = \begin{cases} ٣ - س \quad ، \quad س \leq ١ \\ ٢س + ٢ \quad ، \quad س > ١ \end{cases}$$

مجال الدالة د(س) = ح

الدالة د معرَّفة عند الواحد الصحيح وقيمتها = ٢ أي أنَّ د(١) = ٢ ، ومعرفة على يمين الواحد الصحيح مباشرة وأيضاً على يسار الواحد الصحيح مباشرة . انظر الشكل (٣-٣٢).



شكل (٣ ـ ٣٢)

بدراسة تصرّف الدالة د عندما تقترب س من الواحد الصحيح من جهة اليمين حسب الجدول (٣-٥) نجد أن د(س) تقترب من العدد ٤ ويكون :

$$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} (\text{٢س} + ٢) = ٤$$

بالمثل إذا أردنـا دراسة قيمة الـدالة د عندمـا تقترب س من الواحد الصحيح من جهـة اليسار حسب الجدول (٣-٦) نجد أن د(س) تقترب من العدد ٢ ويكون :

$$\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}} (٣ - \text{س}) = ٢$$

نستنتج من هـذا المثال أنَّ النهايـة غير موجـودة لأن النهايـة من اليمين لا تساوي النهـاية من اليسار عند الواحد الصحيح، أي أنّ : $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \text{د(س)} \neq \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}} \text{د(س)}$

مثال (٣– ٢٧)

لنعتبر الدالة المعرفة كما يلي :

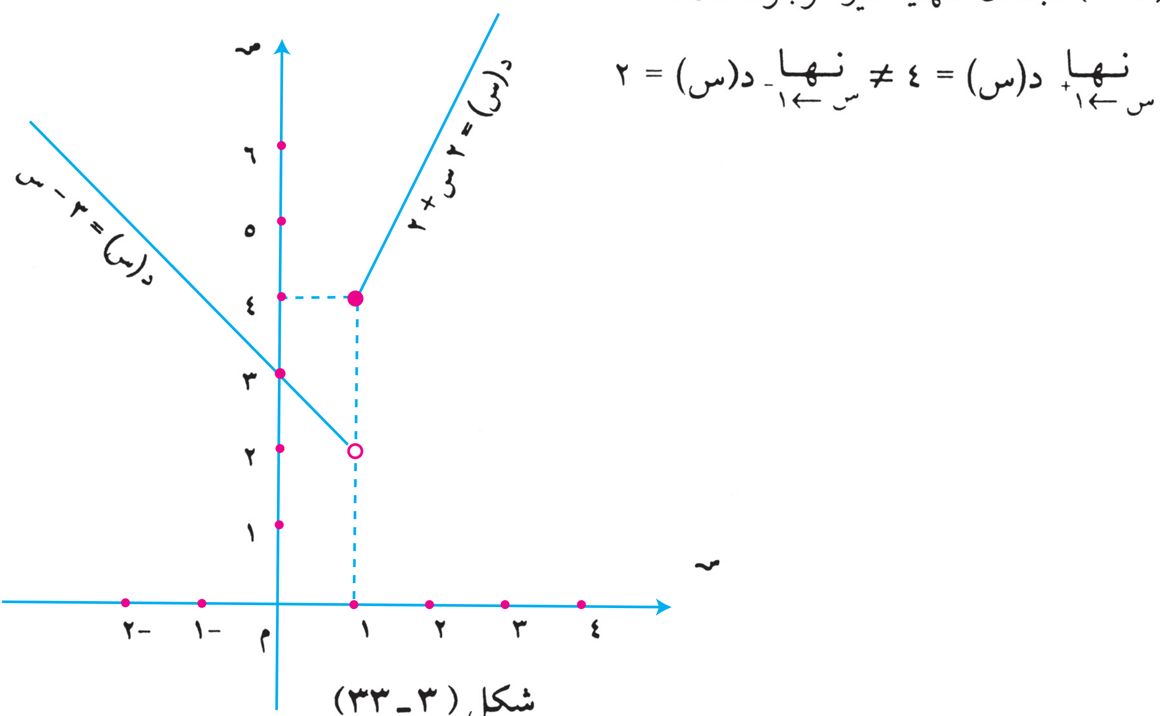
$$د(س) = \begin{cases} ٣ - س \quad ، \quad س < ١ \\ ٢س + ٢ \quad ، \quad س \geq ١ \end{cases}$$

هذا المثـال ما هـو إلا المثال (٣–٢٥) وَ (٣–٢٦) إلا أن الدالـة معرفـة عند الـواحد الصحيح وقيمتها = ٤ .

وكذلك معرّفة عن يمين الواحد الصحيح مباشرة وعن يساره . انظر الشكل (٣–٣٣) .

فبدراسة تصرف الدالة عن يمين الواحد الصحيح وكذلك عن يساره حسب الجدولين (٣–٥) وَ (٣–٦) نجد أنَّ النهاية غير موجودة لأنَّ :

$$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نـهـا} د(س) = ٤ \neq \underset{س \leftarrow ١^{-}}{نـهـا} د(س) = ٢$$



شكل (٣ـ٣٣)

من دراستنا للأمثلة السابقة نستنتج أنه :

في المثال (٣-٢٢) النهاية موجودة وتساوي قيمة الدالة .

وفي المثال (٣-٢٣) النهاية موجودة ولا تساوي قيمة الدالة .

في المثال (٣-٢٤) النهاية موجودة والدالة غير معرفة عند س = ١ .

في المثال (٣-٢٥) النهاية غير موجودة والدالة غير معرفة عند س = ١ .

في المثال (٣-٢٦) النهاية غير موجودة وقيمة الدالة تساوي النهاية من اليسار.

بينما في المثال (٣-٢٧) النهاية غير موجودة وقيمة الدالة تساوي النهاية من اليمين .

نلخّص النقاش السابق كما يلي :

(١) إذا كانت القيمة د(س) تقترب من العدد ل عندما تقترب س من النقطة ا من اليسار فإننا نكتب :

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}^{-}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \text{ل}$$

(٢) إذا كانت القيمة د(س) تقترب من العدد ل عندما تقترب س من النقطة ا من اليمين فإننا نكتب :

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}^{+}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \text{ل}$$

(٣) إذا كانت القيمة د(س) تقترب من العدد ل عندما تقترب س من النقطة ا من اليمين واليسار فإننا نكتب :

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \text{ل}$$

بإمكاننا الآن صياغة التعريف الحدسي التالي :

تعريف (٣-١٠)

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة (ب ، حـ) باستثناء النقطة ا ∋ (ب ، حـ) التي قد لا تكون الدالة د معرفة عندها فإننا نقول إن للدالة د النهاية ل عندما يقترب متغيرها س نحو ا فيما إذا كان من الممكن جعل |د(س) − ل| صغيراً بقدر ما نريد وذلك باختيار |س − ا| صغيراً بقدر كاف .

نكتب ذلك بالشكل :

$\lim\limits_{س \leftarrow ا}$ د(س) = ل أو د(س) $\xrightarrow[س \leftarrow ا]{}$ ل أو د(س) ⟵ ل عندما س ⟵ ا

تدريب (٣-٤)

(١) أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ مستعملا جدولين مناسبين . ارسم منحنى الدالة .

(٢) أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ د(س) إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} ٧ - ٢س & \text{لقيم } س \leq ٢ \\ س + ١ & \text{لقيم } س > ٢ \end{cases}$ مثّل برسم بيان الدالة .

(٣) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س + ٢ & \text{لقيم } س \leq ١ \\ ٢س - ١ & \text{لقيم } س > ١ \end{cases}$

فما هي $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ د(س) ؟

ملحوظة (٣ - ٧)

يمكن أن نستنتج من التعريف (٣-١٠) وما سبقه من أمثلة أنه :

(١) إذا كانت $\lim_{س \to ا^+}$ د(س) = $ل_١$ فإننا نسمّي $ل_١$ نهاية يمنى للدالة د .

(٢) إذا كانت $\lim_{س \to ا^-}$ د(س) = $ل_٢$ فإننا نسمّي $ل_٢$ نهاية يسرى للدالة د .

(٣) تكون نهاية الدالة د عند س = ا موجودة إذا وفقط إذا كانت كل من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند س = ا موجودتين وكانت لهما القيمة نفسها .

(٤) إن قيمة الدالة عند س = ا لا تلعب أي دور في وجود نهاية الدالة عند ا، فقد تكون الدالة غير معرَّفة عند ا ومع ذلك تكون نهايتها عند ا موجودة كما في المثال (٣-٢٤) والتمرين الأول من التدريب (٣-٤). وقد تكون الدالة معرَّفة عند ا ولكن نهايتها عند ا لا تساوي قيمتها عند ا كما في المثال (٣-٢٣) .

نهاية الدالة عندما يسعى متغيرها نحو اللانهاية :

فيما يلي سوف نقوم بحساب نهاية الدالة د(س) عندما تستمر س في التزايد (بدون حدود) بحيث تكون أكبر من أي عدد سبق تعيينه ، وكذلك : نقوم بحساب نهاية الدالة د(س) عندما تستمر س في التناقص (بدون حدود) بحيث تكون أصغر من أي عدد سبق تعيينه .

في الحالة الأولى نقول إن س تنتهي إلى ما لانهاية ، ونكتب : س $\leftarrow \infty$.

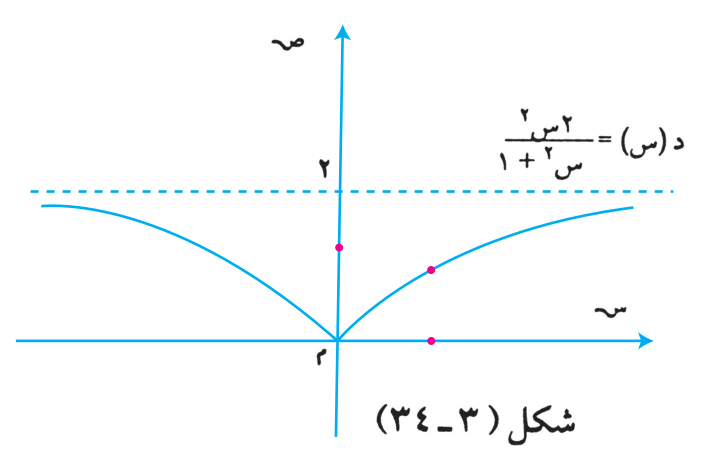
وفي الحالة الثانية نقول إن س تنتهي إلى سالب ما لا نهاية ، ونكتب: س $\leftarrow -\infty$.

مثال (٣- ٢٨)

لنعتبر الدالة د المعرفة بالقاعدة:

$$د(س) = \frac{٢س^٢}{س^٢ + ١}$$

انظر الشكل (٣-٣٤)



شكل (٣ـ٣٤)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	١٠	١٠٠	١٠٠٠	س ← ∞
د(س)	٠	١	$\frac{٨}{٥}$	$\frac{١٨}{١٠}$	$\frac{٣٢}{١٧}$	$\frac{٥٠}{٢٦}$	$\frac{٢٠٠}{١٠١}$	$\frac{٢٠٠٠٠}{١٠٠٠١}$	$\frac{٢٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠٠١}$	د(س) ← ٢

الجدول (٣ - ٧) : س تتزايد بلا حدود .

من هذا الجدول نلاحظ أنه بازدياد قيم س الموجبة فإن الدالة تقترب قيمتها من العدد ٢ .

فمثلاً عندما يكون س = ٤ فإن :

$$٢ - د(س) = ٢ - \frac{٢س^٢}{س^٢+١} = ٢ - \frac{٣٢}{١٧} = \frac{٢}{١٧}$$

أي أنه عندما س = ٤ فإن الفرق بين ٢ والدالة د(س) يساوي $\frac{٢}{١٧}$ وعندما يكون س = ١٠٠ فإن ٢ - د(س) = $\frac{٢}{١٠٠٠١}$

وهكذا فإنه يمكن جعل الفرق بين ٢ ، د(س) صغيراً بقدر ما نريد وذلك باختيار س كبيرة كبراً كافياً . ونعبّر عن ذلك بأن نكتب :

$$\underset{س \leftarrow +\infty}{\text{نـهـا}} د(س) = \underset{س \leftarrow +\infty}{\text{نـهـا}} \frac{٢س^{٢}}{س^{٢} + ١} = ٢$$

والآن لنفرض أنَّ س تأخذ القيم ٠ ، -١ ، -٢ ، -٣ ، -٤ ، -٥ ، -١٠ ، -١٠٠ ، -١٠٠٠ ، . . . أي أنَّ س تتناقص بغير حدود خلال القيم السالبة فتكون د(س) المناظرة معطاة في الجدول التالي :

س	٠	-١	-٢	-٣	-٤	-٥	-١٠	-١٠٠	-١٠٠٠	س ← -∞
د(س)	٠	١	$\frac{٨}{٥}$	$\frac{١٨}{١٠}$	$\frac{٣٢}{١٧}$	$\frac{٥٠}{٢٦}$	$\frac{٢٠٠}{١٠١}$	$\frac{٢٠٠٠٠}{١٠٠٠١}$	$\frac{٢٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠٠١}$	د(س) ← ٢

الجدول (٣ - ٨) : س تتناقص بلا حدود .

وكما سبق فإننا نلاحظ أنه كلما ازداد تناقص قيمة س في الاتجاه السالب فإن قيمة الدالة د(س) تقترب من القيمة ٢ ، ويمكننا جعل الفرق بين ٢ ، د(س) صغيراً بقدر ما نريد إذا أخذنا س صغيرة بصورة كافية في الاتجاه السالب ، ونعبّر عن ذلك بأن نكتب :

$$\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نـهـا}} د(س) = \underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نـهـا}} \frac{٢س^{٢}}{س^{٢} + ١} = ٢$$

تعريف (٣-١١)

(١) إذا كانت الدالة معرَّفة على الفترة (ا ، ∞)، نقول إن للدالة د النهاية ل عندما يقترب متغيرها س نحو ∞ ، فيما إذا كان من الممكن جعل | د(س) - ل | صغيراً جدًا بالقدر الذي نريده، وذلك باختيار س كبيرة جدًا بقدر كافٍ .

ونكتب : $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نـهـا}}$ د(س) = ل

(٢) إذا كانت الدالة معرفة على الفترة (−∞ ، ب)، نقول إن للدالة د النهاية م عندما يقترب متغيرها س نحو− ∞ ، فيما إذا كان من الممكن جعل | د(س) −م | صغيراً جدا بالقدر الذي نريده وذلك باختيار س صغيرة جدًا (س < ٠) بقدر كافٍ .

ونكتب : $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نـهـا}}$ د(س) = م

نظرية (٣-١)

إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفراً، فإن :

(١) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نـهـا}}$ د(س) = صفراً

(٢) $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نـهـا}}$ د(س) = صفراً

(البرهان غير مطلوب).

تدريب (٣-٥)

اتبع الطريقة الحدسية وأنشئ جدولين لتغيُّر د(س) عندما س ⟵ − ∞ وعندما س ⟵ + ∞ لتكون لديك قناعة بصحة النظرية (٣-١)، ارسم بيان الدالة بتحديد نقط تختارها .

مثال (٣- ٢٩)

احسب النهايات التالية :

(أ) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

(ب) $\lim\limits_{س \to -\infty} (٥ س^٢)$

(جـ) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س - ٣}{س^٢ - ٩}$ ، $س \neq \pm ٣$

الحـــل :

(أ) عنـدما تكبر س بـلا حــدود فإن المقام أيضـاً يكبر بــلا حدود بينما البسـط ثابت ، لـذا فإن المقدار $\frac{١}{س - ٢}$ يقترب أكثر فأكثر من الصفر أي أن :

$$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س - ٢} = \text{صفراً}$$

(ب) عندما تصغر س بلا حدود آخذة قيما سالبة ، فإن المقدار (٥ س٢) يكبر بلا حدود ولذا فإنّه لن يقترب من أي عدد حقيقي .

$$\Leftarrow \quad \lim\limits_{س \to -\infty} (٥ س^٢) = \infty$$

(جـ) $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٩} = \frac{س - ٣}{(س - ٣)(س + ٣)}$ $\quad س \neq ٣$

$$= \frac{١}{س + ٣}$$

$$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س - ٣}{س^٢ - ٩} = \lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س + ٣} = \text{صفراً}$$

للسبب الذي ذكرناه في (أ) .

تمـــارين (٣ - ٢)

في كل من التمارين التالية ابحث نهـــاية الدالة د عند القيم المعطاة :

(١) د (س) = س + ٢ عند س = ١

(٢) د (س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + ١ & \text{،} \quad \text{س} \neq ١ \\ ٣ & \text{،} \quad \text{س} = ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٣) د (س) = $\begin{cases} ٢ & \text{،} \quad \text{س} > ٣ \\ -١ & \text{،} \quad \text{س} < ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٤) د (س) = $\begin{cases} \text{س} - ٢ & \text{،} \quad \text{س} \geq ٢ \\ ٢ - \text{س} & \quad \text{س} < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

احسب النهـــايات التالية :

(٥) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س} - ٥}$

(٦) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢}{(\text{س} + ٤)^{٢}}$

(٧) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

(٨) $\underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س} - ٧}{\text{س}^{٢} - ٤٩}$

(٩) $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س + ٩)^{٢}}$

(١٠) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} ٢^{س}$

(١١) $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} ٣^{س}$

(١٢) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}$ لوس

(١٣) $\underset{س \leftarrow \pm\infty}{\text{نهـا}} (٣ س^{٢})$

٣ - ٤ بعض خواص النهايات

في هذا البند سنورد أهم خواص النهايات من خلال النظريات الآتية والتي سنقبلها بدون برهان :

نظرية (٣ ـ ٢) :

إذا كانت د (س) = ث حيث ث مقدار ثابت وكان ا ∋ ح (مجال الدالة) فإن :

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{ا}} \text{ د(س)} = \text{ث}$$

مثال (٣- ٣٠)

احسب النهايات الآتية :

(أ) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}$ ٨ (ب) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \sqrt{٣}}$ ١٩ (جـ) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{٣}{٥}$

الحل :

بما أن الدوال في (أ) وَ (ب) وَ (جـ) ثابتة فحسب النظرية (٣ ـ ٢) يكون :

(أ) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}$ ٨ = ٨ (ب) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \sqrt{٣}}$ ١٩ = ١٩ (جـ) $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

نظرية (٣ ـ ٣)

إذا كانت الدالتان د$_١$ ، د$_٢$ ، معرفتين على الفترة ف التي ينتمي إليها العدد ا وكانت :

$$\lim_{س \leftarrow ا} د_١(س) = ل_١ ، \lim_{س \leftarrow ا} د_٢(س) = ل_٢ ، \lim_{س \leftarrow ا} د(س) = ل$$

فإن :

(١) $\lim_{س \leftarrow ا} [د_١(س) \pm د_٢(س)] = ل_١ \pm ل_٢$

(٢) $\lim_{س \leftarrow ا} [د_١(س) \cdot د_٢(س)] = ل_١ ل_٢$

(٣) $\lim_{س \leftarrow ا} \frac{د_١(س)}{د_٢(س)} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ حيث $ل_٢ \neq$ صفراً، $د_٢(س) \neq$ صفراً لكل $س \in ف$

(٤) $\lim_{س \leftarrow ا} \sqrt{د(س)} = \sqrt{\lim_{س \leftarrow ا} د(س)} = \sqrt{ل}$ ، **حيث أن**

$ل \geq$ صفراً ، $د(س) \geq$ صفرًا لكل $س \in ف$

ملحـوظة (٣ - ٧)

هذه النظرية (نظرية (٣ ـ ٣) صحيحة في حالة :

$س \leftarrow ا^+$ ، $س \leftarrow ا^-$ ، $س \leftarrow \infty$ ، $س \leftarrow -\infty$

مثال (٣- ٣١)

أوجد قيمة النهـــاية في كل مما يلي :

(أ) $\lim_{س \leftarrow ٢} س^٢$

(ب) $\lim_{س \leftarrow ٢} (س^٢ + ٢ س)$

(جـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س}}{س^٢ + ٢ س}$

الحــل :

نعلم أن $\lim_{س \to ٢} س = ٢$ (٣ـ١٣)

(أ) $\lim_{س \to ٢} س^٢ = \lim_{س \to ٢} (س \times س) = \lim_{س \to ٢} س \times \lim_{س \to ٢} س$ النظرية (٣ـ٣)

$= ٢ \times ٢$ من (٣ـ٨)

$= ٤$

(ب) $\lim_{س \to ٢} (س^٢ + ٢ س) = \lim_{س \to ٢} س^٢ + \lim_{س \to ٢} ٢ س$ النظرية (٣ـ٣)

$= ٤ + \lim_{س \to ٢} ٢ س$ من (أ)

$= ٤ + \lim_{س \to ٢} ٢ \times \lim_{س \to ٢} س$ (لماذا ؟)

$= ٤ + ٢ \times ٢$ من (٣ـ١٣)

$= ٨$

(جـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س}}{س^٢ + ٢ س} = \frac{\lim_{س \to ٢} \sqrt{س}}{\lim_{س \to ٢} (س^٢ + ٢ س)}$ (لماذا ؟)

$= \sqrt{\lim_{س \to ٢} س} \div \lim_{س \to ٢} (س^٢ + ٢ س)$ (لماذا ؟)

$= \sqrt{٢} \div ٨$ من (ب)

$= \frac{\sqrt{٢}}{٨}$

النظرية التالية تطبق على المثال السابق الفقرة (أ) .

نظرية (٣ ـ ٤):

إذا كانت د(س) = س^ن حيث ن ∈ ط فإن :

$$\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} س^{ن} = أ^{ن}$$

مثال (٣- ٣٢)

أوجد $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـــا} س^{٥}$

الحــل :

$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـــا} س^{٥} = ٣^{٥}$ النظرية (٣ ـ ٤)

$= ٢٤٣$

مثال (٣- ٣٣)

أوجد قيمة النهـــايات التالية إن وجدت :

(أ) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نهـــا} \sqrt{س - ١}$

(ب) $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{نهـــا} \sqrt{س - ١}$

(جـ) $\underset{س \leftarrow ١}{نهـــا} \sqrt{س - ١}$

(أ) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نهـــا} \sqrt{س - ١} = \sqrt{\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نهـــا} (س - ١)}$ (ملحوظة (٣ ـ ٧))

= صفرًا

(ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \sqrt{\text{س} - ١}$ غير موجودة لأنَّ الدالة $\sqrt{\text{س} - ١}$ غير معرفة في حالة $\text{س} < ١$.

(جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \sqrt{\text{س} - ١}$ غير موجودة لأن الدالة $\sqrt{\text{س} - ١}$ غير معرفة في حالة $\text{س} < ١$

مثال (٣- ٣٤)

احسب $\lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}} \frac{|\text{س}|}{\text{س}}$

الحـل :

نعلم أن : $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \text{س} \geq \text{صفراً} \\ -\text{س} & ، \text{س} < \text{صفراً} \end{cases}$

إذن $\text{د}(\text{س}) = \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$ عندما $\text{س} > \text{صفر}$.

$\text{د}(\text{س}) = \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \frac{-\text{س}}{\text{س}} = -١$ عندما $\text{س} < \text{صفر}$.

إذن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}^+} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}^+} ١$

$= ١ \quad (٣_١٤)$

وكذلك $\lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}^-} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}^-} (-١)$

$= -١ \quad (٣_١٥)$

من (٣ـ١٤) وَ (٣ـ١٥) نجد أن النهـــاية غير موجودة

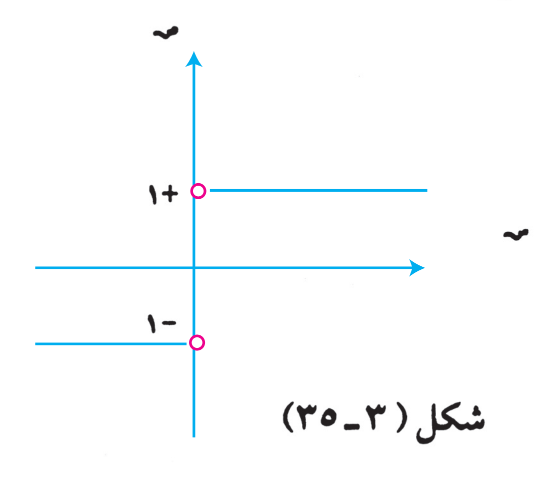
إذن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}} \frac{|\text{س}|}{\text{س}}$ غير موجودة

لاحظ أن الدالة غير معرّفة عند س = صفرًا .

مجالها = ح − {صفر}

مجالها المقابل = {− ١ ، ١}

انظر الشكل المجاور (٣ـ ٣٥)



شكل (٣ـ ٣٥)

مثال (٣− ٣٥)

لتكن د (س) = { ٢ س + ٥ ، س > ٣ ؛ س^{٢} + ٢ ، س ≤ ٣   أوجد نهـــا$_{س ← ٣}$ د (س)

الحـــل :

الدالة د (س) معرفة لـ س > ٣ وَ س ≤ ٣

إذن $\lim_{س \to ٣^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ (٢س + ٥)

ملحوظة (٣ - ٧)

= $\lim_{س \to ٣^+}$ ٢س + $\lim_{س \to ٣^+}$ ٥

ملحوظة (٣ - ٧)

= ٢ $\lim_{س \to ٣^+}$ س + $\lim_{س \to ٣^+}$ ٥

= ٢ × ٣ + ٥ = ١١

$\lim_{س \to ٣^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ (س^{٢} + ٢)

ملحوظة (٣ - ٧)

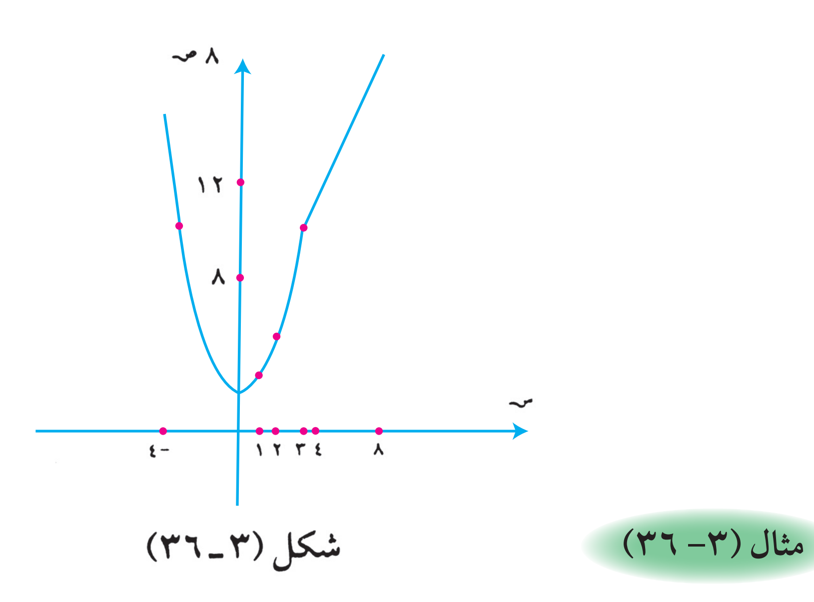
= $\lim_{س \to ٣^-}$ س^{٢} + $\lim_{س \to ٣^-}$ ٢

= ٩ + ٢ نظريتي (٣ - ٢) وَ (٣ - ٤)

= ١١

إذن $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ١١ (لماذا ؟)

لاحظ أن المنحنى الممثل لهذه الدالة كما بالشكل (٣ - ٣٦)



شكل (٣ـ٣٦)

مثال (٣- ٣٦)

احسب النهـــاية إن كان لها وجود للدالة :

$$د\ (س) = \frac{|س^{٢} - ٢٥|}{س - ٥}$$

عند النقط التي يتغير حولها تعريف الدالة د .

الحــل :

$س^{٢} - ٢٥ = ٠ \Leftrightarrow س = ٥$ أو $س = -٥$ ويكون :

$$
د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥} = س + ٥ & \text{عندما } س > ٥ \\ \text{غير معرفة} & \text{عندما } س = ٥ \\ - س - ٥ & \text{عندما } - ٥ > س > ٥ \quad \text{لماذا ؟} \\ \text{صفراً} & \text{عندما } س = - ٥ \\ س + ٥ & \text{عندما } س < - ٥ \end{cases}
$$

فالنقط التي يتغير حولها تعريف الدالة هي :

$س = ٥$ ، $س = - ٥$

(١) عندما $س \leftarrow ٥$:

د معرفة حول $س = ٥$ بقاعدتين، لذلك نحسب كلاً من النهـــايتين اليمنى واليسرى للدالة عند $س = ٥$ ونراعي شرط النهـــاية، تكون موجودة إذا كانت النهـــاية اليمنى = النهـــاية اليسرى.

$$\underset{س \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـــا}} د(س) = \underset{س \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـــا}} (س + ٥)$$

$$= \underset{س \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـــا}} س + \underset{س \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـــا}} ٥$$ نظرية (٣ – ٣)

$$= ٥ + ٥$$ نظرية (٣ – ٢)

$$= ١٠$$

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 5^-} \text{د(س)} = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 5^-} (-\text{س} - 5)$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 5^-} (-\text{س}) - \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 5^-} 5$$ نظـرية (٣ – ٣)

$$= -\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 5^-} \text{س} - \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 5^-} 5$$ نظـرية (٣ – ٣)

$$= -5 - 5 = -10$$

إذن $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 5} \text{د(س)}$ ليس لها وجود لأنَّ :

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 5^+} \text{د(س)} \neq \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow 5^-} \text{د(س)}$$

(٢) عندما س ← –٥ :

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow -5^+} \text{د(س)} = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow -5^+} (-\text{س} - 5)$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow -5^+} (-\text{س}) - \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow -5^+} 5$$ نظـرية (٣ – ٣)

$$= -\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow -5^+} \text{س} - \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow -5^+} 5$$ نظـرية (٣ – ٣)

$$= -(-5) - 5$$

= صفراً

$$\text{وَ } \underset{\text{س} \leftarrow -\text{٥}^-}{\text{نها}} \text{ د(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow -\text{٥}^-}{\text{نها}} (\text{س} + \text{٥})$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow -\text{٥}^-}{\text{نها}} \text{س} + \underset{\text{س} \leftarrow -\text{٥}^-}{\text{نها}} \text{٥}$$

نظرية (٣ - ٣)

$$= -\text{٥} + \text{٥} = \text{صفراً}$$

$$\text{إذن } \underset{\text{س} \leftarrow -\text{٥}}{\text{نها}} \text{ د(س)} = \text{صفراً} \quad \text{لأن } \underset{\text{س} \leftarrow -\text{٥}^+}{\text{نها}} \text{ د(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow -\text{٥}^-}{\text{نها}} \text{ د(س)}$$

تمـــارين (٣ – ٤)

في كل مما يأتي أوجد نهـــاية كل من الدوال عند النقطة المبينة إذا وجدت :

(١) د (س) = $س^{٢}$ عندما س ← ٣

(٢) د (س) = $س^{٢}$ + ٢س عندما س ← ٣

(٣) د (س) = ٣ $س^{٢}$ – ٤ س + ١ عندما س ← ١

(٤) د (س) = $\frac{١}{٢س + ١}$ عندما س ← ١

(٥) د (س) = $\frac{٢ س}{س^{٢} + ١}$ عندما س ← −٢

(٦) د (س) = $\frac{س - ٢}{س^{٢} + س - ٢}$ عندما س ← ٢

(٧) د (س) = $\frac{\sqrt{س^{٢} - ٥}}{س^{٢} + ١}$ عندما س ← ٣

(٨) د (س) = $\frac{|س - ٣|}{س^{٢} + س - ٢}$ عندما س ← – ١

في كل مما يلي احسب النهـــاية للدالة المعطاة عند النقط التي يتغير حولها تعريفها إن كان لهذه النهـــاية وجود .

(٩) د (س) = $\begin{cases} ٢س + ١ & \text{عندما } -٢ < س \leq ٢ \\ ٧ - س & \text{عندما } ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

(١٠) د (س) =
- س^{٢} + ٥   عندما س < ٣
- ٢ (س + ٤)   عندما ٣ ≤ س < ٥
- س^{٢} − ٧   عندما س ≤ ٥

(١١) د (س) = |س + ٤| ÷ (س^{٢} + ٥س − ٤)

(١٢) د (س) = |س^{٢} − ٤س − ٥| ÷ |س − ٥|

(١٣) د (س) =
- س − ٤   س ≤ ٤
- ٤ − س^{٢} س < ٤

٣ - ٥ حـالات عَـدم التعـيين

سنعالج في هذا البند، ومن خلال بعض الأمثلة، حالات عدم التعيين الآتية :

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ الناتجة من التعويض المباشر في الدالة المعطاة .

مثال (٣- ٣٧)

احسب : $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{س}^٢ - ٦\,\text{س} + ٥}{\text{س}^٢ - ١}$

الحـل :

نفرض أن : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ - ٦\,\text{س} + ٥}{\text{س}^٢ - ١}$ $\quad \text{س} \in \text{ح} - \{-١ ، ١\}$

لو جعلنا س = ١ فإنَّ الكسر السابق يصبح :

$\text{د}(١) = \frac{١ - ٦ \times ١ + ٥}{١ - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (حالة عدم التعيين)

ولكن $\text{د}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} = \frac{\text{س} - ٥}{\text{س} + ١}$ حيث $\text{س} \neq ١$

من $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} (\text{س} - ٥) = ١ - ٥ = -٤$ ،

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} (\text{س} + ١) = ١ + ١ = ٢$

ومن النظرية (٣ - ٣) نستنتج أن :

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} د(س) = \frac{\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (س - ٥)}{\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (س + ١)} = \frac{-٤}{٢} = -٢$$

مثال (٣- ٣٨)

إذا كانت د (س) $= \frac{\sqrt{٢ س + ٣} - ٣}{س - ٣}$ فأوجد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نـــها}}$ د (س)

الحــل :

لو جعلنا س = ٣ فإن الكسر يصبح :

$$د (٣) = \frac{\sqrt{٢ \times ٣ + ٣} - ٣}{٣ - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ (حالة عدم التعيين)

د معرَّفة على { س : س $\geq \frac{-٣}{٢}$ ، س $\neq$ ٣ } (لماذا ؟)

إذن د معرفة في فترة حول س = ٣

$$د (س) = \frac{\sqrt{٢ س + ٣} - ٣}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{٢ س + ٣} + ٣}{\sqrt{٢ س + ٣} + ٣} = \frac{٢ س + ٣ - ٩}{(س - ٣) (\sqrt{٢ س + ٣} + ٣)}$$

$$= \frac{٢ (س - ٣)}{(س - ٣) (\sqrt{٢ س + ٣} + ٣)}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢س + ٣} + ٣} \qquad \text{حيث } س \neq ٣$$

$$\lim_{س \to ٣} د(س) = \lim_{س \to ٣} \frac{٢}{\sqrt{٢س + ٣} + ٣}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٦ + ٣} + ٣}$$ باستخدام النظرية (٣ ـ ٣)

$$= \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

مثال (٣- ٣٩)

إذا كانت $د(س) = ا_ن س^ن + ا_{ن-١} س^{ن-١} + \cdots + ا_١ س + ا.$

حيث $ا_ن \neq$ صفراً ، $ن \in ط$ فأثبت أنَّ :

$$\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{س^ن} = ا_ن$$

الحـــل :

$$\frac{د(س)}{س^ن} = ا_ن + \frac{ا_{ن-١}}{س} + \frac{ا_{ن-٢}}{س^٢} + \cdots + \frac{ا_١}{س^{ن-١}} + \frac{ا.}{س^ن}$$

من النظرية (٣ ـ ١) نستنتج أنَّ :

$$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} = \text{صفراً}$$

ومن النظرية (٣ـ٣)

$$\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{س^{ن}} = \lim_{س \to \infty} ا_{ن} + \lim_{س \to \infty} \frac{ا_{ن-1}}{س} + \cdots$$

$$+ \lim_{س \to \infty} \frac{ا_{1}}{س^{ن-1}} + \lim_{س \to \infty} \frac{ا_{0}}{س^{ن}}$$

$$= ا_{ن} + \text{صفراً} + \cdots + \text{صفراً} + \text{صفراً} = ا_{ن}$$

ملحوظة (٣ – ٨)

في المثال السابق يمكن استبدال ∞ بـ $-\infty$ فتكون النتيجة العامة هي :

$$\lim_{س \to \pm\infty} \frac{د(س)}{س^{ن}} = ا_{ن}$$

نتيجة (٣ – ١) :

إذا كان $د(س) = ا_{ن} س^{ن} + ا_{ن-1} س^{ن-1} + \cdots + ا_{0}$ (كثيرة حدود من الدرجة ن)

فإن : $\lim_{س \to \pm\infty} د(س) = \lim_{س \to \pm\infty} ا_{ن} س^{ن} \left(1 + \frac{ا_{ن-1}}{ا_{ن} س} + \cdots + \frac{ا_{0}}{ا_{ن} س^{ن}}\right)$

$$= ا_{ن} \lim_{س \to \pm\infty} س^{ن}$$

$$= \pm\infty$$

تدريب (٣-٦)

أوجد : (١) $\lim_{س \to \pm\infty}$ (-٣ س^{٢} + ٥ س + ٧)

(٢) $\lim_{س \to \pm\infty}$ (٥ س^{٣} - ٤ س^{٢} + س - ١)

مثال (٣- ٤٠)

إذا كانت د (س) = ا$_{ن}$ س^{ن} + ا$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + . . . + ا$_{١}$ س + ا .

ر (س) = ب$_{م}$ س^{م} + ب$_{م-١}$ س$^{م-١}$ + . . . + ب$_{١}$ س + ب .

حيث ا$_{ن}$ ≠ صفراً ، ب$_{م}$ ≠ صفراً، م ، ن ∈ ط .

فاثبت أن : $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{د(س)}{ر(س)} = \frac{ا_{ن}}{ب_{م}}$ ($\lim_{س \to \pm\infty}$ س$^{ن-م}$)

الحــل :

$$\lim_{س \to \pm\infty} \frac{د(س)}{ر(س)} = \lim_{س \to \pm\infty} \left(\frac{د(س)}{س^{ن}} \div \frac{ر(س)}{س^{م}} \right) س^{ن-م}$$

$$= \frac{ا_{ن}}{ب_{م}} \left(\lim_{س \to \pm\infty} س^{ن-م} \right)$$

من النظرية (٣ـ٣) والمثال (٣ـ٣٩) والملحوظة (٣ـ٧) .

ملحوظة (٣ - ٩)

(١) إذا كانت م = ن فإن :

$$\lim_{س \to \pm\infty} \frac{د(س)}{ر(س)} = \frac{أ_ن}{ب_م}$$

(٢) إذا كانت ن > م فإن :

$$\lim_{|س| \to \infty} \left| \frac{د(س)}{ر(س)} \right| = \infty \quad \text{(لماذا ؟)}$$

(٣) إذا كانت ن < م فإن :

$$\lim_{س \to \pm\infty} \frac{د(س)}{ر(س)} = \text{صفراً} \quad \text{(لماذا ؟)}$$

مثال (٣- ٤١)

إذا كانت $د(س) = \frac{٣ + ٢س - س^٢}{٥ + ٣س - ٢س^٢}$ فاحسب $\lim_{س \to \pm\infty} د(س)$

الحـــل :

واضح أن د معرَّفة بشرط ٥ + ٣ س − ٢ س^{٢} ≠ صفراً

٥ + ٣س − ٢ س^{٢} = صفراً ⟺ (٥ − ٢س) (١+س) = صفراً

⟺ س = $\frac{٥}{٢}$ أو س = − ١

إذن : د معرفة على ح − {− ١ ، $\frac{٥}{٢}$} = (− ∞ ، − ١) ∪ (− ١ ، $\frac{٥}{٢}$) ∪ ($\frac{٥}{٢}$ ، ∞)

$$د(س) = \frac{٣ + ٢س − س^{٢}}{٥ + ٣س − ٢س^{٢}} = \frac{\frac{٣}{س^{٢}} + \frac{٢}{س} − ١}{\frac{٥}{س^{٢}} + \frac{٣}{س} − ٢}$$

بقسمة البسط والمقام على س^{٢} ≠ صفراً

$$\text{إذن : } \lim_{س \to \pm\infty} د(س) = \frac{\lim_{س \to \pm\infty} \left(\frac{٣}{س^{٢}} + \frac{٢}{س} − ١\right)}{\lim_{س \to \pm\infty} \left(\frac{٥}{س^{٢}} + \frac{٣}{س} − ٢\right)} = \frac{٠ + ٠ − ١}{٠ + ٠ − ٢} = \frac{١}{٢}$$

قارن النتيجة مع المثال (٣ ـ ٤٠)

مثال (٣- ٤٢)

احسب $\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٢س^{٣} - ٣ س + ٥}{٣س^{٤} - ٢ س^{٢} + ٣}$ إن كان لها وجود

الحـــل :

مجال هذه الدالة ح (لماذا ؟)

$$\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٢س^{٣} - ٣ س + ٥}{٣س^{٤} - ٢ س^{٢} + ٣} = \lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٢}{٣} س^{٣ - ٤}$$

المثـال (٣ـ ٤٠)

$$= \lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٢}{٣س}$$

= صفراً

الملحوظة (٣ـ ٩)

مثال (٣- ٤٣)

إذا كانت د (س) = $\frac{س - ٣}{\sqrt{س^{٢} + ٢ س - ٣}}$

فاحسب $\lim\limits_{س \to \infty}$ د (س) (إن كان لها وجود)

الحـــل :

د معرفة بشرط $س^2 + 2س - 3 > صفر$

$س^2 + 2س - 3 = صفراً \Leftrightarrow (س + 3)\ (س - 1) = صفراً$

$\Leftrightarrow س = -3$ أو $س = 1$

إذن د معرفة على : $(-\infty ، -3) \cup (1 ، \infty)$ ـ نفرض أن $س > 1$

فتكون $د(س) = \frac{س - 3}{\sqrt{س^2 + 2س - 3}} = \frac{س - 3}{\sqrt{س^2 (1 + \frac{2}{س} - \frac{3}{س^2})}}$

$$= \frac{س - 3}{\sqrt{س^2}\sqrt{1 + \frac{2}{س} - \frac{3}{س^2}}}$$

$$= \frac{س - 3}{س\sqrt{1 + \frac{2}{س} - \frac{2}{س^2}}}$$ لأن $س > صفر$

$$= \frac{1 - \frac{3}{س}}{\sqrt{1 + \frac{2}{س} - \frac{3}{س^2}}}$$

بقسمة البسط والمقام على $س \neq صفراً$

فإنَّ : $\lim_{س \to \infty}$ د(س) $= \dfrac{\lim_{س \to \infty} \left(١ - \dfrac{٣}{س}\right)}{\sqrt{\lim_{س \to \infty} ١ + \dfrac{٢}{س} - \dfrac{٣}{س^٢}}}$ نظرية (٣-٣)

$= \dfrac{١ - ٠}{\sqrt{\lim_{س \to \infty} \left(١ + \dfrac{٢}{س} - \dfrac{٣}{س^٢}\right)}}$ نظرية (٣-٣)

$= \dfrac{١}{\sqrt{١ + ٠ - ٠}} = ١$

تدريب (٣-٧)

أثبت أنَّ : $\lim_{س \to -\infty}$ د(س) = − ١ حيث د(س) هي الدالة المعطـاة في المثـال السابـق.

مثال (٣- ٤٤)

احسب $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{٤ س^٢ - ٣ س + ٥} - ٢ س\right)$، إن كان لها وجود

الحـــل :

نفرض أن د (س) = $\sqrt{٤ س^٢ - ٣ س + ٥} - ٢$ س،

د (س) معرّفة بشرط ٤س^٢ - ٣س + ٥ ≤ صفر

ب^٢ - ٤ اجـ = ٩ - ٤ (٤) (٥) = - ٧١ > صفر

إذن ٤ س^٢ - ٣ س + ٥ ≤ صفراً لكل س ∈ ح (لماذا ؟)

عندما س ← ∞ فإن د (س) تصبح من الشكل ∞ - ∞

وهي حالة عدم تعيين لذلك نقول :

$$د (س) = (\sqrt{٤ س^٢ - ٣ س + ٥} - ٢ س) \times \frac{\sqrt{٤ س^٢ - ٣ س + ٥} + ٢ س}{\sqrt{٤ س^٢ - ٣ س + ٥} + ٢ س}$$

$$= \frac{- ٣ س + ٥}{\sqrt{٤ س^٢ - ٣ س + ٥} + ٢ س}$$

$$\lim_{س \to \infty} د (س) = \lim_{س \to \infty} \frac{- ٣ + \frac{٥}{س}}{\sqrt{٤ - \frac{٣}{س} + \frac{٥}{س^٢}} + ٢}$$

بقسمة البسط والمقام على س > صفر

$= \frac{-٣}{\sqrt{٤} + ٢} = - \frac{٣}{٤}$

مثال (٣- ٤٥)

إذا كانت د (س) = $\frac{س - ٣}{\sqrt{(٣ - س)(س - ٢)}}$

فأوجد $\lim_{س \leftarrow \pm \infty}$ د (س) إذا كان لها وجود

الحـــل :

د معرفة بشرط (٣ - س) (س - ٢) > صفر.

(٣ - س) (س - ٢) = صفراً ⟺ س = ٣ أو س = ٢

١ > صفر ⟸ (٣ - س) (س - ٢) > صفر لكل س ∈ (٢، ٣)

⟸ مجال د = (٢ ، ٣)

⟸ د غير معرفة قرب ± ∞ وبالتالي ليس لهذه الدالة نهاية عندما س ⟵ ± ∞

تمـــاريــن (٣ – ٥)

احسب قيم النهايات للدوال الآتية عند النقط المذكورة بجانب كل منها إن كانت موجودة :

(١) نهـــا $\frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}$ عندما س ← ٤

(٢) نهـــا $\frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$ عندما س ← ٢

(٣) نهـــا $\frac{س^{٢} - ٢ س - ٨}{س^{٢} - ١٦}$ عندما س ← ٤

(٤) نهـــا $\frac{س^{٢} - ٢ س - ١٥}{س^{٢} - ٤س - ٥}$ عندما س ← ٥

(٥) نهـــا $\frac{٣ - \sqrt{س}}{س - ٩}$ عندما س ← ٩

(٦) نهـــا $\frac{\sqrt{٢ س} - ٢}{س^{٢} - ٤}$ عندما س ← ٢

(٧) نهـــا $\frac{٢ - س}{\sqrt{س + ٢} - ٢}$ عندما س ← ٢

(٨) نهـــا $\frac{\sqrt{٢ س + ٣} - ٣}{س^{٢} - ٢س - ٣}$ عندما س ← ٣

(٩) إذا كانت د (س) = $س^{٢} - ٤$ فأوجد :

(أ) د (٢ + هـ)

(ب) نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{د (٢ + هـ) - د (٢)}{هـ}$

(١٠) إذا كانت د (س) = $\frac{|س^٢ - ٦ س - ٧|}{س^٢ - ١}$ فأوجد

$\underset{س \to -١}{نهـا}$ د (س)

(١١) احسب $\underset{س \to \pm\infty}{نهـا}$ $\frac{٣س - ٢}{٢ - ٥س}$ إن كان لها وجود

(١٢) احسب $\underset{س \to \pm\infty}{نهـا}$ $\frac{٥س - ٣}{\sqrt{س^٢ - ٤}}$ إن كان لها وجود

(١٣) احسب $\underset{س \to \pm\infty}{نهـا}$ $\frac{٢س + ٥}{\sqrt{٩ - س^٢}}$ إن كان لها وجود

(١٤) احسب $\underset{س \to \pm\infty}{نهـا}$ $\frac{٢س^٣ - س^٢ + ٥}{٥س^٣ + ٢س^٢ - ٣س}$ إن كان لها وجود

(١٥) احسب $\underset{س \to \pm\infty}{نهـا}$ $\frac{٥س^٣ + ٣ س - ٢}{٢س^٢ + ٤}$ إن كان لها وجود

(١٦) احسب $\underset{س \to \pm\infty}{نهـا}$ $\frac{٢س^٣ - ٥}{س^٢ + ٣}$ إن كان لها وجود

(١٧) احسب $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \left(\sqrt{س^{٢} - ٢س + ٢} - س \right)$ إن كان لها وجود

(١٨) احسب $\lim\limits_{س \leftarrow \pm\infty} \left(\frac{٣س^{٢}}{س - ١} - \frac{٦س^{٢}}{٢س - ١} \right)$ إن كان لها وجود

(١٩) إذا كانت $د(س) = \frac{|س - ٢|}{س + ٣}$ فأوجد $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} د(س)$

٣ - ٦ بعض النظريات على نهـاية دالـة

نظرية (٣ ـ ٥) :

إذا كانت كل من الدالتين $د_١$ ، $د_٢$ معرّفة على الفترة ف التي حذف منها العدد ا وكانت $د_١$ ،
محدودة على ف ـ { ا }

وَ $\underset{س \leftarrow ا}{نهـا}$ $د_٢$ (س) = صفراً فإن :

$\underset{س \leftarrow ا}{نهـا}$ $د_١$ (س) $د_٢$ (س) = صفراً

البرهان : غير مطلوب

ملحـوظة (٣ - ١٠)

هذه النظرية صحيحة عندما س ← ± ∞ حيث تشترط أن $د_١$ محدودة على الفترة (ب، ∞) في حالة + ∞ أو محدودة على (- ∞ ، ب) في حالة - ∞ لعدد حقيقي ب .

مثال (٣- ٤٦)

إذا كانت د (س) = ٢س جتا $\frac{١}{س}$ فاحسب $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ د (س)

الحـل :

نفرض أن $د_١$ (س) = ٢س ، $د_٢$ (س)=جتا $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفراً.

كل من $د_١$ ، $د_٢$ ، معرفة على $ح^*$ حيث $ح^*$ = ح - { صفراً } .

$\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ $د_١$ (س) = صفراً (٣ - ١٦)

$|د_٢ (س)| = |جتا \frac{١}{س}| \leq ١$ لكل س ∋ $ح^*$ (٣ - ١٧)

من (٣ ـ ١٦) وَ (٣ ـ ١٧) نجد أنّ شروط النظرية (٣ ـ ٥) متحققة ونستنتج أنَّ :

$$\text{نهــا}_{\text{س} \leftarrow .}\ \text{د}_1(\text{س})\ \text{د}_2(\text{س}) = \text{صفراً}.$$

مثال (٣– ٤٧)

احسب $\text{نهــا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{٣}{\text{س}^٢ - ٤}$ جا ٢ س

الحــل :

نفرض أن $\text{د}_1(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}^٢ - ٤}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) =$ جا ٢ س

د_1 معرفة بشرط $\text{س}^٢ - ٤ \neq$ صفراً إذن د_1 معرفة لكل س $\in$ (٢ ، ∞)

كل من د_1 ، د_2 معرفة على الفترة (٢ ، ∞) كما أن :

$$\text{نهــا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \text{د}_1(\text{س}) = \text{نهــا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{٣}{\text{س}^٢ - ٤}$$

$$= \text{نهــا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{\frac{٣}{\text{س}^٢}}{١ - \frac{٤}{\text{س}^٢}}$$ بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^٢ \neq$ صفراً

$$= \text{صفراً}$$

كما أن :

$|\text{د}_2(\text{س})| = |$ جا ٢ س $| \leq ١$ إذن د_2 محدودة في (٢ ، ∞)

إذن $\text{نهــا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \text{د}_1(\text{س})\ \text{د}_2(\text{س}) =$ صفراً نظرية (٣ ـ ٥)

مثال (٣– ٤٨)

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - ٩} \sqrt{\frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س}^٢}}$ فاحسب $\text{نهــا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \text{د}(\text{س})$

الحـــل :

نفرض أن $د_1$ (س) = $\frac{س + ٤}{س^٢ - ٩}$ ، و $\sqrt{\frac{س^٢ - ٤}{س^٢}}$ = $د_2$ (س)،

$د_1$ معرّفة لكل س ∈ ح - { -٣، ٣ } (لماذا ؟)

$د_2$ معرفة بشرط $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢}$ ≥ صفراً ⟺ $س^٢ - ٤$ ≥ صفراً

⟺ |س| ≥ ٢

⟺ س ≥ ٢ أو س ≤ - ٢

إذن كل من $د_1$ ، $د_2$ معرفة على الفترة ف = (٣، ∞)

كما أن $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا}$ $د_1$ (س) = $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا}$ $\frac{س + ٤}{س^٢ - ٩}$

= $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا}$ $\frac{\frac{١}{س} + \frac{٤}{س^٢}}{١ - \frac{٩}{س^٢}}$ بقسمة البسط والمقام على $س^٢$ ≠ صفراً

= صفراً

|$د_2$ (س)| = $\left| \sqrt{\frac{س^٢ - ٤}{س^٢}} \right|$ = $\left| \sqrt{١ - \frac{٤}{س^٢}} \right|$ > ١ ، لماذا ؟

إذن $د_2$ محدودة في (٣، ∞)

مما سبق نجد أنَّ $\lim_{س \to \infty}$ د (س) = صفراً

نظـرية (٣ – ٥)

نظرية (٣ـ٦)

إذا كانت الدوال $د_١$، $د_٢$، $د_٣$ معرّفة على الفترة ف التي حذف منها العدد ا

وكانت $د_١(س) \geq د_٢(س) \geq د_٣(س)$ لكل س ∈ ف – { ا } وكانت :

$\lim_{س \to ا} د_١(س) = \lim_{س \to ا} د_٣(س) = ل$ فإن :

$\lim_{س \to ا} د_٢(س) = ل$

البرهان : غير مطلوب .

ملحـوظة (٣ – ١١)

هذه النظرية صحيحة في حالة س ← ± ∞

مثال (٣– ٤٩)

احسب $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ + جتا ٢س}{س - ١}$

الحــل :

| جتا ٢ س | ≤ ١ ⟺ – ١ ≤ جتا ٢س ≤ ١

⟺ ٣ – ١ ≤ ٣ + جتا ٢ س ≤ ٣ + ١

⟺ ٢ ≤ ٣ + جتا ٢س ≤ ٤ (٣ – ١٨)

$\frac{٣ + جتا ٢ س}{س - ١}$ معرفة بشرط س ≠ ١ أي معرفة على (١، ∞)

حيث س - ١ > صفر

إذن $\frac{٢}{س - ١} \leq \frac{٣ + جتا ٢ س}{س - ١} \leq \frac{٤}{س - ١}$ من (٣ - ١٨)

وبما أن $\lim_{س \to \infty} \frac{٢}{س - ١} = \lim_{س \to \infty} \frac{٤}{س - ١}$ = صفراً (لماذا ؟)

إذن $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ + جتا ٢ س}{س - ١}$ = صفراً نظرية (٣ - ٦)

نظرية (٣ - ٧) :

$\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} = ١$ حيث س مقيسة بالتقدير الدائري (أي بالراديان)

البرهان :

واضح أن النظرية تتعلّق بقيم س الصغيرة جداً

سواء كانت موجبة أو سالبة

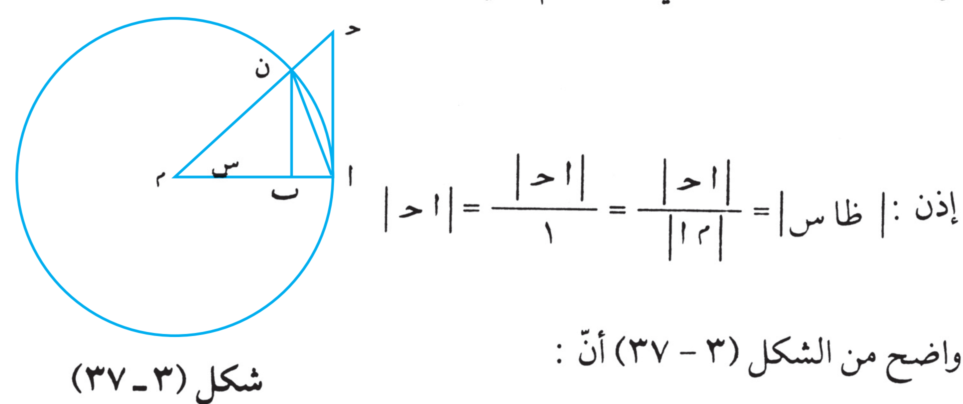
نرسم دائرة الوحدة ونفرض أنَّ

طول القوس $\overset{\frown}{\text{ا ن}}$ = | س | فيكون :

ق ($\angle$ ا م ن) = س راديان .

ونرسم ا ح مماساً لدائرة

الوحدة عند ا بحيث يلاقي امتداد م ن في جـ .



إذن : $|\text{ظا س}| = \dfrac{|\text{ا ح}|}{|\text{م ا}|} = \dfrac{|\text{ا ح}|}{١} = |\text{ا ح}|$

واضح من الشكل (٣ – ٣٧) أنّ :

شكل (٣ ـ ٣٧)

مساحة المثلث م ا ن < مساحة القطاع الدائري م ا ن < مساحة المثلث م ا ح أي أنَّ :

$\frac{١}{٢} \times |\text{م ا}| \times |\text{ب ن}| < \frac{١}{٢} \times (|\text{م ا}|)^{٢} \times |\text{س}| < \frac{١}{٢} |\text{م ا}| \times |\text{ا ح}|$ ، (طول [م ا] = ١)

إذن $|\text{ب ن}| < |\text{س}| < |\text{ا ح}|$

هذا يعني أن $|\text{جاس}| < |\text{س}| < |\text{ظاس}| = \dfrac{|\text{جاس}|}{|\text{جتاس}|}$

إذن $١ < \dfrac{|\text{س}|}{|\text{جاس}|} < \dfrac{١}{|\text{جتاس}|}$ بالقسمة على $|\text{جاس}| \neq$ صفراً

أي أن $|\text{جتاس}| < \dfrac{|\text{جاس}|}{|\text{س}|} < ١$ من خواص المتراجحات

ولكن $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ | جتاس | = ١ (لماذا ؟)

إذن $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{|جاس|}{|س|} = ١$ نظرية (٣ ـ ٦)

لغرض النهاية عندما س ← ٠، نلاحظ أن $\frac{ط}{٢} >$ س $> -\frac{ط}{٢}$ ،

وفي هذه الحالة يمكن التحقق بسهولة من أنَّ : $\frac{|جا س|}{|س|} = \frac{جا س}{س}$ (لماذا ؟)

إذن : $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جا س}{س} = ١$

تدريب (٣-٨)

أكمل الجدول الآتي باستخدام الآلة الحاسبة :

س بالدرجة	س بالراديان	جاس	$\frac{جا س}{س}$
٠	٠	٠	غير معرَّفة
°١٠	٠,١٧٤٥٣	٠,١٧٣٦٥	٠,٩٩٥
°٥			
°٢			
°١			

ما هي القناعة التي توصلت إليها ؟

نتيجة (٣ – ٢)

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ظاس}{س} = ١$$

البرهان :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ظاس}{س} = \lim \frac{جاس}{س} \times \frac{١}{جتاس}$$ لماذا ؟

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١}{جتاس} = ١ \times ١$$ لماذا ؟

$$= ١$$

مثال (٣– ٥٠)

إذا كانت س مقيسة بالتقدير الدائري فاحسب :

(أ) $\lim_{س \to \pm\infty} س \, جا \frac{١}{س}$

(ب) $\lim_{س \to ٠} س \, قتاس$

(جـ) $\lim_{س \to ٠} س \, ظتاس$

الحل :

(أ) $\lim_{س \to \pm\infty} س \, جا \frac{١}{س} = \lim_{\frac{١}{س} \to ٠} \frac{جا \frac{١}{س}}{\frac{١}{س}} = ١$

ولكن $\frac{١}{س} \to ٠$ تكافئ $س \to \pm \infty$ إذن $\lim_{س \to \pm\infty} (س \, جا \frac{١}{س}) = ١$

(ب) $\lim_{س \to ٠} س \, قتاس = \lim_{س \to ٠} \frac{س}{جاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{\frac{جاس}{س}} = \frac{١}{١} = ١$

(جـ) $\lim_{س \leftarrow ٠} س \, ظتاس = \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{س}{ظا س} = \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{\frac{ظا س}{س}} = \frac{١}{١} = ١$

مثال (٣- ٥١)

إذا كانت س مقيسة بالراديان فاحسب :

(أ) $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا ٥س}{س}$

(ب) $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{٣ظا ٢س}{س}$

الحــل :

(أ) $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا ٥س}{س} = \lim_{س \leftarrow ٠} ٥ \times \frac{جا ٥س}{٥ س}$

$= \lim_{س \leftarrow ٠} ٥ \times \lim_{٥س \leftarrow ٠} \frac{جا ٥س}{٥ س}$ ، (عندما س ← ٠ فإن ٥ س ← ٠)

$= ٥ \times ١ = ٥$

(ب) $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{٣ظا ٢س}{س} = \lim_{س \leftarrow ٠} ٦ \times \frac{ظا ٢س}{٢س}$

$= \lim_{س \leftarrow ٠} ٦ \times \lim_{٢س \leftarrow ٠} \frac{ظا ٢س}{٢س}$ ،(عندما س ← ٠ فإن ٢ س ← ٠)

$= ٦ \times ١ = ٦$

نظرية (٣ – ٨) :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس}{س} = صفراً$$ حيث س مقيسة بالتقدير الدائري

البرهان :

$$\frac{١ - جتاس}{س} = \frac{١ - جتاس}{س} \left(\frac{١ + جتاس}{١ + جتاس}\right)$$ لماذا ؟

$$= \frac{١ - جتا^٢ س}{س (١ + جتاس)}$$

$$= \frac{جا^٢ س}{س (١ + جتاس)}$$ لماذا ؟

$$= \frac{جاس}{س} \times \frac{جاس}{١ + جتاس}$$

إذن :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس}{س} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جاس}{س} \times \frac{جاس}{١ + جتاس}\right)$$

$$= \left(\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س}\right) \left(\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{١ + جتاس}\right)$$ **نظرية (٣ ـ ٣)**

$$= (١) \left(\frac{صفر}{١ + ١}\right)$$ **نظرية (٣ ـ ٧)**

$$= ١ \times صفر = صفراً$$

مثال (٣ – ٥٢)

إذا كانت $د(س) = \frac{٢ - ٢ جتاس}{٢ س}$ فاحسب $\lim_{س \to ٠} د(س)$

الحـــل :

$$د(س) = \frac{٢(١-جتاس)}{٢س} = \frac{١-جتاس}{س}$$

إذن $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} د(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١-جتاس}{س}$

= صفراً نظرية (٣ ـ ٨)

مثال (٣- ٥٣)

إذا كانت $د(س) = \frac{٢س + ١-جتاس}{٣س}$ ، فاحسب $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} د(س)$

الحـــل :

$$د(س) = \frac{٢س}{٣س} + \frac{١-جتاس}{٣س}$$

$$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٣}\left(\frac{١-جتاس}{س}\right)$$

إذن $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} د(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{٢}{٣} + \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{٣}\left(\frac{١-جتاس}{س}\right)$ نظرية (٣ ـ ٣)

$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٣} \lim\limits_{س \leftarrow ٠}\left(\frac{١-جتاس}{س}\right)$ نظرية (٣ ـ ٢)

$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٣}$ (صفر) نظرية (٣ ـ ٨)

$= \frac{٢}{٣} +$ صفر

$= \frac{٢}{٣}$

مثال (٣- ٥٤)

إذا كانت د (س) = $\frac{٣س - ٢ ظا ٣س}{٣س + ٢ جا ٥س}$ ، فاحسب $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

الحـــل :

د (س) = $\frac{٣ - ٦ \times \frac{ظا ٣س}{٣ س}}{٣ + ١٠ \times \frac{جا ٥س}{٥س}}$ بقسمة كلٍ من البسط والمقام على س ≠ صفراً

$\lim_{س \to ٠}$ د (س) = $\frac{\lim_{س \to ٠} ٣ - \lim_{س \to ٠} ٦ \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{٣ س}}{\lim_{س \to ٠} ٣ + \lim_{س \to ٠} ١٠ \times \lim_{٥س \to ٠} \frac{جا ٥س}{٥س}}$

= $\frac{٣ - ٦ \times ١}{٣ + ١٠ \times ١}$ = $\frac{- ٣}{١٣}$

مثال (٣- ٥٥)

احسب $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٣س - جتا ٥س}{س^٢}$

الحـــل :

نعلم من قوانين حساب المثلثات أن :

جتا ٣س - جتا ٥س = ٢ جا $\frac{٣س + ٥س}{٢}$ جا $\frac{٥س - ٣س}{٢}$

= ٢ جا ٤س جا س

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا٣س} - \text{جتا٥س}}{\text{س}^{٢}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ جا٤س جاس}}{\text{س}^{٢}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٨ \times \frac{\text{جا٤س}}{\text{٤ س}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٨ \times \underset{٤س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٤س}}{\text{٤ س}} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

$$= ٨ \times ١ \times ١ = ٨$$

تمــارين (٣ - ٦)

احسب قيمة نهاية الدالة د في كل مما يلي إن وجدت ، مستخدماً نظريتي (٣ـ ٥)، (٣ـ ٦) .

(١) د (س) = ٣ (س - ٢) جا $\frac{٢}{س - ٢}$ عندما س ← ٢

(٢) د (س) = |س - ٣| جتا $\frac{١}{س - ٣}$ عندما س ← ٣

(٣) د (س) = $\frac{٤}{س}$ جا س عندما س ← - ∞

(٤) د (س) = $\frac{٢ س}{س^٢ + ١}$ جتا ٣ س عندما س ← ∞

(٥) د (س) = $\frac{س + ٢}{٢ س^٢} \sqrt{\frac{س^٢ - ٩}{س^٢}}$ عندما س ← ∞

(٦) د (س) = $\frac{جتا (٣س + ٢)}{س + ٥}$ عندما س ← - ∞

(٧) د (س) = $\frac{٥ + جتا س}{س + ٣}$ عندما س ← - ∞

(٨) د (س) = $\frac{٣ س + ٢ جا ٢ س}{س - ٣}$ عندما س ← ∞

في كل مما يلي إذا كانت س مقيسة بالتقدير الدائري فاحسب نهاية كل من الدوال المعطاة عند النقط المذكورة قرب كل منها :

(٩) د (س) = $\frac{جا ٣س}{س}$ عندما س ← ٠

(١٠) د (س) = $\frac{ظا ٢ س}{٣ س}$ عندما س ← ٠

(١١) $د(س) = (س + ٢)\ ظتا(س + ٢)$ عندما $س \leftarrow -٢$

(١٢) $د(س) = \frac{جا٢س\ ظا٣س}{س^٢}$ عندما $س \leftarrow ٠$

(١٣) $د(س) = (س - ٥)\ جا\frac{٢}{س - ٥}$ عندما $\frac{٢}{س - ٥} \leftarrow ٠$

(١٤) $د(س) = \frac{جا(س - ٢)}{س^٢ - س - ٢}$ عندما $س \leftarrow ٢$

(١٥) $د(س) = ظا٣س\ قتا٥س$ عندما $س \leftarrow ٠$

(١٦) $د(س) = ٥س\ (قتاس + ظتا٢س)$ عندما $س \leftarrow ٠$

(١٧) $د(س) = \frac{جتا٢س - ١}{س^٢}$ عندما $س \leftarrow ٠$

(١٨) $د(س) = \frac{جتا٢س - جتا٤س}{س^٢}$ عندما $س \leftarrow ٠$

(١٩) $د(س) = \frac{جا٥س - جا٣س}{جا٢س}$ عندما $س \leftarrow ٠$

(٢٠) $د(س) = \frac{جا(ظا٣س)}{س}$ عندما $س \leftarrow ٠$

(٢١) $د(س) = \frac{س^٢ - ٣س}{جا٢س}$ عندما $س \leftarrow ٠$

(٢٢) $د(س) = \frac{١ - جتا٣س}{س}$ عندما $س \leftarrow ٠$

(٢٣) $د(س) = \frac{جاس}{١ + جتاس}$ عندما $س \leftarrow ٠$

(٢٤) $د(س) = \frac{س\ جتاس - س^٢}{٢س}$ عندما $س \leftarrow ٠$

٣ – ٧ اتصال الدالة عند نقطة

من الناحية الهندسية نقول إن الدالة د متصلة في الفترة ف إذا امكننا رسم المنحنى الممثل لها في هذه الفترة دون أن نرفع رأس القلم عن الورقة التي نرسم عليها .

وحين نقول إن د متصلة عند النقطة س = حـ فلا بد أن تكون حـ منتمية إلى مجال د، أي أن د معرفة عند حـ .

تعريف (٣ – ١٢)

الاتصال من اليمين عند نقطة :

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة ف = [ا ، ب] وكانت النقطة حـ ∈ ف

بحيث ا ≤ حـ< ب فإننا نقول إن د متصلة من اليمين عند النقطة حـ إذا كانت :

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{حـ}^{+}} \text{د (س)} = \text{د (حـ)}$$

تعريف (٣ – ١٣)

الاتصال من اليسار عند نقطة :

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة ف = [ا ، ب] وكانت النقطة حـ ∈ ف

بحيث ا < حـ ≤ ب فإننا نقول إن د متصلة من اليسار عند النقطة حـ إذا كانت :

$$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{حـ}^{-}} \text{د (س)} = \text{د (حـ)}$$

تعريف (٣ - ١٤)

إذا كانت د معرفة على الفترة المغلقة ف = [ا ، ب] وكانت النقطة حـ ∈ (ا، ب)

فإننا نقول إن د متصلة عند حـ إذا كانت :

$$\lim_{س \leftarrow حـ^{+}} د(س) = د(حـ) = \lim_{س \leftarrow حـ^{-}} د(س) \Leftrightarrow \lim_{س \leftarrow حـ} د(س) = د(حـ)$$

ملحوظة (٣ - ١٢)

أي دالة متصلة عند نقطة حـ لا بد وأن تكون معرفة عند حـ أي أن العدد د (حـ) له وجود .

ولكن إذا كانت الدالة معرفة عند حـ فلا يشترط أن تكون متصلة عند حـ .

مثال (٣- ٥٦)

ابحث اتصال الدالة د (س) = |س| عند س = صفراً

الحـــل :

نعلم أن :

$$|س| = \begin{cases} س ، س \geq صفراً \\ -س ، س < صفر \end{cases}$$

الدالة د (س) معرفة عند الصفر، د (صفر) = صفراً

$$\lim_{س \leftarrow ٠^+} د(س) = \lim_{س \leftarrow ٠^+} س = صفراً$$

$$\lim_{س \leftarrow ٠^-} د(س) = \lim_{س \leftarrow ٠^-} (-س) = صفراً$$

إذن $\lim_{س \leftarrow صفر}$ د(س) = صفراً وبالتالي $\lim_{س \leftarrow صفر}$ د (س) = د (صفر)

إذن الدالة متصلة عند س = صفراً

مثال (٣- ٥٧)

ابحث اتصال الدالة عند س = ٤

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - س - ١٢}{س - ٤} & عندما\ س \neq ٤ \\ ٧ & عند\ س = ٤ \end{cases}$$

الحــل :

د معرفة عند س = ٤ ، د (٤) = ٧ (٣ـ١٩)

$$\lim_{س \leftarrow ٤} د(س) = \lim_{س \leftarrow ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٣)}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٤} (س + ٣) \quad \text{حيث } س \neq ٤$$

$$= ٧ \qquad (٣ـ٢٠)$$

من(٣ـ١٩) وَ (٣ـ٢٠) نستنتج أنَّ :

$$\lim_{س \leftarrow ٤} د(س) = د(٤)$$

إذن د متصلة عند س = ٤

مثال (٣– ٥٨)

على الفترة $\left(\frac{-ط}{٣} ، \frac{ط}{٣}\right)$ تكون الدالة د (س) = $\frac{٣س + جا ٢س}{ظا ٣ س}$

غير معرّفة عند س = صفراً ، عرّف د (صفر) بحيث تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة

الحـــل :

$$د(س) = \frac{٣ + ٢ \times \frac{جا ٢ س}{٢ س}}{٣ \times \frac{ظا ٣ س}{٣ س}}$$ بقسمة كل من البسط والمقام على س ≠ صفراً

$$\underset{س \leftarrow صفر}{نهـا}\ د(س) = \frac{٣ + ٢ \times ١}{٣ \times ١} = \frac{٥}{٣}$$

لكي تكون د متصلة عند س = صفراً يجب أن يكون : د (صفر) = $\frac{٥}{٣}$ وبالتالي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٣س + جا ٢س}{ظا ٣س} & \text{عندما } س \in (-\frac{ط}{٣} ، \frac{ط}{٣}) - \{صفر\} \\ \frac{٥}{٣} & \text{عندما } س = \text{صفراً} \end{cases}$$

تدريب (٣-٩)

هل الدوال الآتية متصلة عند الصفر ؟ علّل ذلك .

$$د(س) = \begin{cases} \frac{جا س}{س} & ، س \neq \text{صفراً} \\ ١ & ، س = \text{صفراً} \end{cases}$$

$$ر(س) = \begin{cases} \frac{١ - جتا س}{س} & ، س \neq \text{صفراً} \\ \text{صفر} & ، س = \text{صفراً} \end{cases}$$

تمـــارين (٣ - ٧)

ابحث الاتصال من اليمين ومن اليسار ، والاتصال لكل من الدوال الآتية عند النقطة المذكورة مع كل منها :

(١) د (س) = $\begin{cases} س + ٣ & \text{عندما } س \leq \text{صفراً} \\ ٣ - س & \text{عندما } س > \text{صفر} \end{cases}$ عند س = صفراً

(٢) د (س) = $|س - ٢|$ عند س = ٢

(٣) د (س) = $|س^{٢} - ٥س + ٦|$ عند س = ٣

(٤) د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢ & \text{عندما } س \leq \text{صفراً} \\ س - ٢ & \text{عندما } س > \text{صفر} \end{cases}$ عند س = صفراً

(٥) د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & \text{عندما } س \neq ٣ \\ ٢ س & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٦) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 + س - ٢٠}{س + ٥} & \text{عندما } س \neq -٥ \\ -١ & \text{عندما } س = -٥ \end{cases}$ عند س = −٥

(٧) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} & \text{عندما } س \neq ٣ \\ ٢ & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٨) د (س) = $\begin{cases} (س - ٣) \text{ جتا } \dfrac{٥}{س - ٣} & \text{عندما } س \neq ٣ \\ \text{صفراً} & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٩) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا } ٢ س}{س} & \text{عندما } س \neq \text{صفراً} \\ ٢ & \text{عندما } س = \text{صفراً} \end{cases}$ عند س = صفراً

في كل من التمارين التالية أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند النقطة المذكورة مع كل منها إن أمكن ذلك :

(١٠) د (س) = $\dfrac{س^2 + ٥ س - ٦}{س - ١}$ عند س = ١

(١١) ر (س) = $\dfrac{٢ س + \text{ظا } ٣ س}{\text{جا } ٢ س}$ عند س = صفراً

(١٢) ى (س) = $\dfrac{\sqrt{٢ س + ٣} - ٣}{س - ٣}$ عند س = ٣

(١٣) ف (س) = (س − ٢) جا $\dfrac{٣}{س - ٢}$ عند س = ٢

٣ – ٨ الاتصال في فترة وخواص الدوال المتصلة

تعريف (٣ ـ ١٥)

(١) إذا كانت الدالة د معرّفة على الفترة المفتوحة ف = (ا ، ب) فإننا نقول إن د متصلة في ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة .

(٢) إذا كانت الدالة د معرّفة على الفترة المغلقة ف = [ا ، ب] فإننا نقول إن د متصلة في ف إذا تحققت الشروط التالية :

(ا) د متصلة في (ا ، ب)

(ب) د متصلة من اليمين عند ا

(حـ) د متصلة من اليسار عند ب

يمكن وضع شرط اتصال دالة د في فترة مغلقة ف = [ا ، ب] كما يلي :

(ا) لكل حـ ∈ (ا ، ب) فإن $\lim\limits_{س \leftarrow حـ}$ د (س) = د (حـ) .

(ب) $\lim\limits_{س \leftarrow ا^{+}}$ د (س) = د (ا)

(حـ) $\lim\limits_{س \leftarrow ب^{-}}$ د (س) = د (ب)

نظرية (٣ ـ ٩)

إذا كانت الدالتان $د_١$ ، $د_٢$ معرّفتين على الفترة (ا ، ب) وكانتا متصلتين عند النقطة حـ ∈ ف

فإن كلا من الدوال الآتية تكون متصلة عند حـ :

(١) $د_١ \pm د_٢$ حيث $(د_١ \pm د_٢)$ (س) = $د_١$(س) ± $د_٢$(س)

(٢) $د_١ \, . \, د_٢$ حيث $د_١ \, . \, د_٢$ (س) = $د_١$(س) $د_٢$(س)

(٣) $\frac{د_١}{د_٢}$ حيث $\frac{د_١}{د_٢}$ (س) = $\frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ $د_٢$(حـ) ≠ صفراً

البرهان :

$د_١$ ، $د_٢$ متصلتان عند حـ فرضاً، لذا فإن : $\underset{س \leftarrow حـ}{نهـا}$ $د_١$(س) = $د_١$ (حـ)، $\underset{س \leftarrow حـ}{نهـا}$ $د_٢$(س) = $د_٢$ (حـ)

(١) من التعريف :

$(د_١ \pm د_٢)$ (حـ) = $د_١$ (حـ) ± $د_٢$ (حـ)، ومن نظرية (٣ ـ ٣) فإن :

$\underset{س \leftarrow حـ}{نهـا}$ $(د_١ \pm د_٢)$ (س) = $\underset{س \leftarrow حـ}{نهـا}$ $د_١$ (س) ± $\underset{س \leftarrow حـ}{نهـا}$ $د_٢$ (س)

= $د_١$ (حـ) ± $د_٢$ (حـ)

إذن $د_١ \pm د_٢$ متصلة عند النقطة حـ

(٢) ، (٣) متروك كتمرين للطالب

نتيجة (٣ - ٣)

دالة كثيرة الحدود على الصورة :

د (س) = $ا_ن$ $س^ن$ + $ا_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + ... + $ا_١$ س + $ا_٠$ متصلة لكل س ∈ ح

وذلك لأن الدالة الثابتة ت (س) = ا ودالة المطابقة م (س) = س دوال متصلة لكل س ∈ ح
ومن النظرية (٣ ـ ٩) الفقرة (٢) نستنتج أن الدالة ا $س^ر$ حيث ر ∈ ط متصلة لكل س ∈ ح
ومن الفقرة (١) ينتج أن دالة كثيرة الحدود متصلة لكل س ∈ ح .

مثال (٣- ٥٩)

ابحث اتصال الدالة : د (س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ على مجالها .

الحـــل :

د معرفة بشرط أن ٩ - $س^٢$ ≥ صفراً

٩ - $س^٢$ ≥ صفراً ⟺ $س^٢$ ≤ ٩

⟺ | س | ≤ ٣

$\Leftrightarrow$ $-٣ \leq$ س ≤ ٣

$\Leftarrow$ مجال د = [−٣، ٣]

لكي نبحث اتصال د في [−٣، ٣] :

(١) نبحث اتصال د في (− ٣ ، ٣)

(٢) نبحث اتصال د من اليمين عند س = − ٣

(٣) نبحث اتصال د من اليسار عند س = ٣

(١) نفرض أن حـ $\in$ (−٣، ٣)

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{حـ}}{\text{نهـــا}}\ \text{د (س)} = \underset{\text{س} \leftarrow \text{حـ}}{\text{نهـــا}} \sqrt{٩ - \text{س}^٢} = \sqrt{\underset{\text{س} \leftarrow \text{حـ}}{\text{نهـــا}}\ (٩ - \text{س}^٢)}$$

$$= \sqrt{٩ - \text{حـ}^٢} = \text{د (حـ)}$$

إذن : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{حـ}}{\text{نهـــا}}$ د (س) = د (حـ) $\Leftarrow$ د متصلة في (−٣، ٣)

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -٣^+}{\text{نهـــا}}\ \text{د (س)} = \underset{\text{س} \leftarrow -٣^+}{\text{نهـــا}} \sqrt{٩ - \text{س}^٢} =$ صفراً

$\text{د (−٣)} = \sqrt{٩ - (-٣)^٢} =$ صفراً

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow -٣^+}{\text{نهـــا}}\ \text{د (س)} = \text{د (−٣)}$

إذن د متصلة على يمين س = − ٣ .

(٣) $\lim_{س \to ٣^-}$ د (س) = $\lim_{س \to ٣^-} \sqrt{٩ - س^٢}$ = صفراً

د (٣) = $\sqrt{٩ - ٩}$ = صفراً

$\lim_{س \to ٣^-}$ د (س) = د (٣) ⟸ د متصلة على يسار س = ٣

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن د متصلة في [- ٣ ، ٣].

مثال (٣- ٦٠)

إذا كانت د (س) = $\frac{|س^٢ - ٤س + ٣|}{س - ١}$ فابحث اتصال د في ح

الحـــل :

د معرّفة بشرط س ≠ ١ ⟸ د (١) غير معرّف وبالتالي د غير متصلة عند س = ١ .

س^٢ - ٤ س + ٣ = ٠ ⟺ (س - ١) (س - ٣) = صفراً

⟺ س = ١ أو س = ٣

د (س) =
- س - ٣ عندما س ≥ ٣
- - (س - ٣) عندما ١ < س < ٣
- غير معرفة عندما س = ١
- س - ٣ عندما س < ١

لكي نبحث اتصال د في ح نبحث اتصالها في فترات مجالها الجزئية وكذلك اتصالها عند النقط التي يتغير حولها تعريف د .

« أولاً » بحث الاتصال في الفترات الجزئية من المجال :

(١) د (س) = س − ٣ لكل س > ٣ $\Leftarrow$ د متصلة في (٣، ∞)؛ لأنها كثيرة حدود .

(٢) د (س)= − (س − ٣) لكل س ∈ (١، ٣) $\Leftarrow$ د متصلة في (١ ، ٣)؛ لأنها كثيرة حدود .

(٣) د (س) = س − ٣ لكل س < ١ . إذن د متصلة في (− ∞ ، ١)؛ لأنها كثيرة حدود .

« ثانياً » بحث الاتصال عند النقط التي يتغير عندها تعريف د :

(٤) عند س = ١ فإن د (١) غير معرّفة وبالتالي د غير متصلة عند س = ١

(٥) عند س = ٣ فإن د (٣) = صفراً .

نهـــا$_{س \leftarrow ٣^+}$ د (س) = نهـــا$_{س \leftarrow ٣^+}$ (س − ٣) = ٣ − ٣ = صفراً .

نهـــا$_{س \leftarrow ٣^-}$ د (س) = نهـــا$_{س \leftarrow ٣^-}$ [− (س − ٣)] = − (٣ − ٣) = صفراً

نهـــا$_{س \leftarrow ٣^+}$ د(س) = نهـــا$_{س \leftarrow ٣^-}$ د (س) = صفراً = د (٣)

$\Leftrightarrow$ نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ د (س) = صفراً = د (٣)

إذن د متصلة عند س = ٣

مما سبق نستنتج أن د متصلة لكل س ∈ ح - { ١ }

تدريب (٣-١٠)

هل يمكن تعريف د عند س = ١ بحيث تكون متصلة عند هذه النقطة ؟

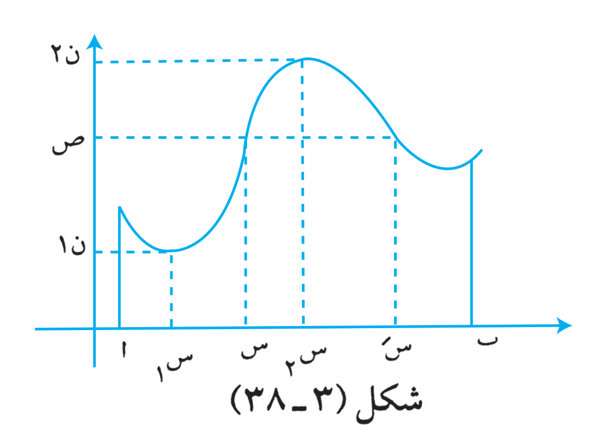
وفي نهاية هذا الباب نذكر نظريتين لأهميتهما الشديدة في الأبواب القادمة

نظرية (٣ - ١٠)

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة المغلقة ف = [ا ، ب] فإن للدالة د عندئذ قيمة عظمى ع على ف وقيمة صغرى م على ف . أي يوجد عددان $س_١$ ،$س_٢$ في ف بحيث

م = د $(س_١)$ ≥ د (س) ≥ د $(س_٢)$ = ع لكل س ∈ ف .

إذا نظرنا إلى الدالة المتصلة المرسومة في الشكل (٣ ـ ٣٨) نجد أن القيمة الصغرى للدالة تقع عند النقطة $ن_١$، والقيمة العظمى تقع عند النقطة $ن_٢$ ، حيث $ن_١$ = د $(س_١)$ ، $ن_٢$ = د $(س_٢)$.



شكل (٣ـ٣٨)

نظرية (٣ـ١١) ، نظرية القيمة الوسطى

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة المغلقة [ا ، ب] وكانت القيمة العظمى للدالة هي ع وَ القيمة الصغرى هي م فإنه لأي عدد ع ≤ ص ≤ م يوجد عدد ب ≤ س ≤ ا بحيث ص = د (س)

انظر الشكل (٣ـ٣٨) . إن ما تنص عليه هذه النظرية هو أنه لكل قيمة ص واقعة بين $ن_1$ ، و$ن_2$ لا بد من وجود قيمة س واقعة بين ا ، ب تكون فيها ص صورة للدالة عند س .

ملحوظة (٣ - ١٣)

تلاحظ من الشكل (٣ــ٣٨) أنه قد توجد أكثر من قيمة لـ س بحيث د (س) = ص (في الشكل د (س) = د (سَ) = ص) .

لذا فإننا يجب أن نفهم نص النظرية (٣ـ١١) بأن هناك على الأقل قيمة لـ س بحيث ع≤ د (س) = ص ≤ م وليس بالضرورة قيمة وحيدة .

نتيـجة (٣ - ٤)

إذا كانت د متصلة على الفترة المغلقة [ا ، ب] ووجد عددان $س_١$ ، $س_٢$ في [ا ، ب] بحيث د ($س_١$) > صفر ود ($س_٢$) < صفر فإنه يوجد عدد س في [ا ، ب] بحيث د (س) = صفراً.

البــرهـــان :

حسب النظرية (٣ ـ ١٠) الدالـة د تأخذ نهايتيها العظمى والصغرى على [ا ، ب]. لما كانت د ($س_١$) > صفر، فإن القيمة العظمى ع > صفر ولكون د ($س_٢$) < صفر فإن القيمة الصغرى م < صفر. إذن العدد صفر ∋ [م ، ع] ومنه نستنتج من نظرية (٣ ـ ١١) وجود عدد س بحيث د(س) = صفراً.

إن شرط الاتصال لتحقيـق النظريتين (٣ ـ ١٠) و (٣ ـ ١١) هو شرط ضروري. ولتـوضيح ذلك نقدّم المثالين التاليين.

مثال (٣- ٦١)

لدينا الدالة د (س) في الفترة [-١ ، ١]، حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} & س \neq ٠ \\ ١ & س = ٠ \end{cases}$

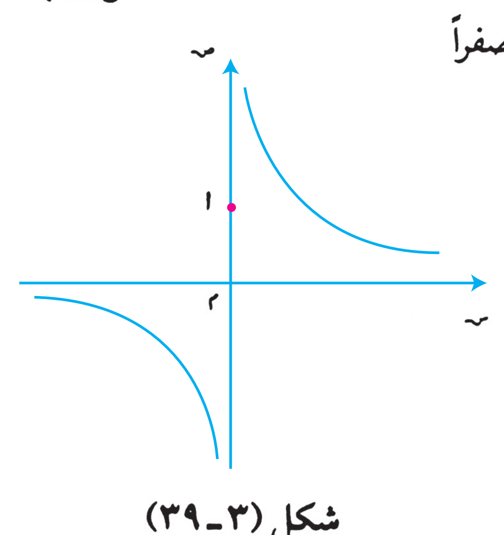
الواضح أن الدالة غير متصلة عند س = صفراً

لأن $\lim_{س \to ٠^+} \frac{١}{س} = \infty$ **(غير موجودة)**

كذلك لاحظ أنه لا توجد قيمة

عظمى ولا صغرى للدالة

في الفترة [-١ ، ١]



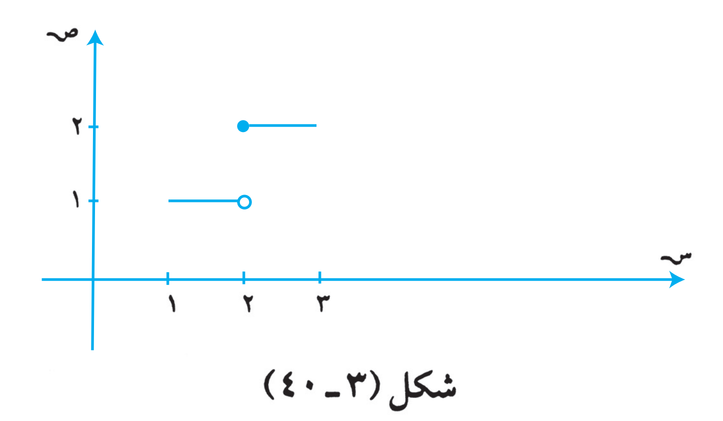
شكل (٣ـ٣٩)

مثال (٣- ٦٢)

لتعتبر الدالة د (س) على الفترة [١ ، ٣] حيث

$$د(س) = \begin{cases} ١ & ١ \le س < ٢ \\ ٢ & ٢ \le س \le ٣ \end{cases}$$

وهي مرسومة في الشكل (٣ ـ ٤٠)



شكل (٣ ـ ٤٠)

الدالة د غير متصلة في النقطة س = ٢ لأن

$$\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٢ \quad \text{بينما} \quad \lim_{س \to ٢^-} د(س) = ١$$

النهاية العظمى للدالة هي ٢ والنهاية الصغرى هي ١ . إذا أخذنا القيمة $١\frac{١}{٢}$ الواقعة بين النهايتين فلا يوجد س في الفترة [١ ، ٣] بحيث د (س) = $١\frac{١}{٢}$

تمـــارين (٣ - ٨)

ابحث الاتصال لكل من الدوال التالية في مجالها :

(١) $د(س) = \sqrt{١ - س^{٢}}$

(٢) $د(س) = \sqrt{١٦ - س^{٢}}$

(٣) $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ٢٥}$

(٤) $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ٣س - ١٠}$

(٥) $د(س) = \sqrt{١٢ - س - س^{٢}}$

(٦) $د(س) = \dfrac{|س^{٢} - ٢س - ١٥|}{س - ٥}$

(٧) $د(س) = |س^{٢} - ٣س - ٤|$

(٨) $د(س) = جاس$

(٩) $د(س) = جتاس$

(١٠) $د(س) = |س - ٢| + |س + ٣| - ٥$

(١١) $د(س) = \dfrac{س^{٢} + ٣س - ١}{س - ٢}$

(١٢) د(س) =
- ٢س + ٣ إذا كانت ٢ ≤ س
- س + ٦ إذا كانت ٢ > س ≥ ٥
- س + ١ إذا كانت س > ٥

(١٣) د(س) =
- ١ / (س − ٢) عندما س < ٢
- س + ٢ عندما س ≤ ٢

(١٤) د(س) =
- س − ٣ عندما ٣ ≤ س
- ٢ عندما ٣ > س < ٨
- س − ٦ عندما ٨ ≥ س

(١٥) د(س) =
- ١ عندما س < صفر
- ١ + جاس عندما صفر ≥ س < ط/٢
- ٢ + (س − ط/٢)^٢ عندما س ≤ ط/٢

(١٦) هل الدالتان :

د١(س) = س جا (١/س) ، د٢(س) = جا س / س

متصلتان عند س = صفراً ؟ كيف نجعل كلا منهما متصلة عند س = صفراً ؟

تمارين عامة

(١) إذا كانت الدالة د معرّفة كما يلي :

$$د(س) = \begin{cases} ٣ س - ١ & \text{عندما } س < \text{صفر} \\ \text{صفراً} & \text{عندما } س = \text{صفراً} \\ ٢ س + ٥ & \text{عندما } س > \text{صفر} \end{cases}$$

فاحسب $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د(س)، $\lim_{س \leftarrow -٢}$ د(س)، $\lim_{س \leftarrow \text{صفر}}$ د(س)

(٢) احسب $\lim_{س \leftarrow \pm\infty} \frac{ا س^{٢} + ب س + حـ}{ء س^{٢} + هـ}$ حيث ا، ب، حـ، ء، هـ ثوابت من ح، ء ≠ صفراً.

(٣) احسب $\lim_{س \leftarrow \infty} \frac{٢ س - ٣}{\sqrt{س^{٢} + س - ٢}}$

(٤) احسب $\lim_{س \leftarrow \infty} \frac{س + ٥}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ إذا كانت موجودة

(٥) احسب $\lim_{س \leftarrow \infty} \left(\frac{س^{٢} + س}{س - ٢} - \frac{س^{٢} + ٢ س}{س + ٢} \right)$

(٦) احسب $\lim_{س \leftarrow \infty} \frac{|س^{٢} - ٩|}{س^{٢} + ٣}$

(٧) احسب نهاية الدالة الآتية في حالة وجودها عند س = − ١

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{|س^{٢} + ٧ س + ٦|}{س + ٦} & \text{عندما } -٦ < س < -١ \\ \text{غير معرفة} & \text{عندما } س = -١ \\ س + ٥ & \text{عندما } س > -١ \end{cases}$$

(٨) احسب $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \dfrac{٣ - جا(٢س + ١)}{س - ٥}$

(٩) احسب $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \dfrac{٥س + ٣ جتا(٢س + ١)}{٢ س - ٣}$

(١٠) إذا كانت س مقيسة بالتقدير الدائري فاحسب :

$\lim\limits_{س \leftarrow صفر} \dfrac{ظا ٢س}{ظا ٣س}$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow صفر} \dfrac{ظا ٤س + جا ٤س}{س جتا ٢س}$

(١١) احسب $\lim\limits_{س \leftarrow صفر} \dfrac{جتاس - جتا٣س}{س}$ علماً بأن س بالتقدير الدائري

في كل من التمرينين (١٢)، (١٣) ابحث الاتصال للدالة عند النقطة س = صفر.

$$(١٢)\ د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا س\ \ ظا ٢س}{س^{٢}} & \text{عندما } س \neq \text{صفراً} \\ ٢ & \text{عندما } س = \text{صفراً} \end{cases}$$

(١٣) د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جتا ٢ س} - ١}{\text{س}^٢} & \text{عندما س} \neq \text{صفراً} \\ -٢ & \text{عندما س = صفراً} \end{cases}$

أعد تعريف الدالة في كل من التمرينين (١٤)، (١٥) بحيث تكون متصلة عند نقطة ا

إن أمكن :

(١٤) د (س) = $\frac{\sqrt{\text{٣ س} - ٢} - \sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} - ٢}$ حيث ا = ٢

(١٥) د (س) = (٥ − س) جتا $\frac{٣}{\text{٥} - \text{س}}$ حيث ا = ٥

(١٦) ابحث الاتصال للدالة الآتية خلال مجالها :

د (س) = $\frac{|\text{س}^٢ + \text{س} - ٢٠|}{\text{س} - ٤}$

(١٧) ابحث اتصال الدالة :

د (س) = جاس + جتاس في الفترة [$-\frac{\text{ط}}{٢}$ ، $\frac{\text{ط}}{٢}$]

الباب الرابع

حساب التفاضل

٤ – ١ نبذة تاريخية.

٤ ـ ٢ معدَّل تغير الدالة على فترة.

٤ – ٣ مشتقَّة الدالة .

٤ – ٤ قواعد الاشتقاق.

٤ – ٥ تطبيقات هندسية فيزيائية .

٤ – ٦ قاعدة التسلسل.

٤ ـ ٧ معدلات التغير المرتبطة ببعضها.

٤ – ٨ مشتقات الدوال الدائرية .

٤ – ٩ المشتقات العليا.

٤ – ١٠ التفاضل.

٤ - ١ نبـذة تـاريخيـة :

الـدراسـات الحديثة الموثقـة لتـاريخ الـريـاضيـات تؤكـد لنـا - نحن المسلمين - أن علماءنـا الرياضيين هم الذين وضعوا الأسس الأولى لهذا الفرع من الرياضيات (التفاضل والتكامل).

فهذا على سبيل المثال، العالم (شرف الدين الطـوسي - المتوفى عام ٦١٠هـ) من خلال دراسته للمعادلات التي درجتها ≤ ٣ في كتابـه : (قوام الحساب) يفكّـر بالـدالة دون أن يذكـر اسمها، لكنه لجأ إلى شكل آخر من هذا المفهوم الذي عرف لاحقاً بالمشتق.

ولكي يحل هذه المعادلات، يـدرس الطوسي القيمة العظمى للعبارات الجبريـة ويأخذ «المشتق الأول» لهذه العبـارات - دون أن يستعمل اسمه - ثم يعـدمه ويبرهن على أن جـذر المعادلـة التي يحصل عليها إذا ما عُوِّض في العبارة الجبرية، أعطى القيمة العظمى للعبارة*.

وهكذا أخذ الغربيون في عصر نهضتهم من علومنـا ونتاج علمائنا الشيء الكثير، وقاموا بتطويره حتى نشأ التفاضل والتكـامل على يد الإنجليزي (نيوتن - تـوفي عام ١٧٢٧م) والألماني (لايبنتز - توفي عام ١٧١٦م) وغيرهما.

وللتفاضـل أهمية كبيرة إذ يعـوّل عليه كثيراً في حساب مسـارات القذائف والصـواريخ والأقمار الصناعية، بل والكواكب والنجوم وغير ذلك.

٤ - ٢ معـدَّل تغيُّر الدالـة على فترة :

في الباب الثالث تعرفنا على مفهوم نهاية الدالة، مما ساعدنا على دراسة سلوك الدالة بجوار كل نقطة من نقط مجال تعريفها، ومعرفة ما إذا كانت متصلة أم لا.

وفي هـذا الباب سنـركز دراستنـا على نهاية صيغـة معينة، لما لهذه النهـاية من أهميـة في مجالات عديدة كما سيتضح لنا.

---

* انظر: تـاريخ الرياضيات العـربية بين الجبر والحساب/ د. رشـدي راشد، ترجمة الدكتـور حسين زين الدين/ مركـز دراسات الوحدة العربية ١٩٨٩م - انظر ص ٢٠٨ - ٢٣١.



لنفرض أن لدينا جسيماً (أي جسماً صغيراً يمثَّل بنقطة) يسير على خط مستقيم حسب المعادلة ف = ن^{٢} حيث ترمز ف لبعد الجسيم من نقطة الأصل م عند اللحظة ن .

والشكل (٤ - ١) يبين المنحنى الذي يمثل هذه المعادلة، وفيه تمّ تدريج المحور الأفقي لقياس الزمن بالثانية (ث)، والمحور الرأسي لقياس المسافة بالسنتيمتر (سم) . لاحظ أن :

شكل (٤ ـ ١)

ف = صفراً عندما ن = صفراً

ف = ١ سم عندما ن = ١ ث

ف = ٤ سم عندما ن = ٢ ث

ف = ٩ سم عندما ن = ٣ ث

. . . . الخ .

وحسب مفهومنا للسرعة فإن متوسط سرعة الجسيم تكون :

١ سم / ث خلال الثانية الأولى

٣ سم / ث خلال الثانية الثانية

٥ سم/ ث خلال الثانية الثالثة .

. . . . الخ .

ما هو متوسط سرعة الجسيم خلال الفترة من ن = ٢ إلى ن = $\frac{١}{٢}$ ٢ ؟

ن = ٢ ⇐ ف = $٢^٢$ = ٤ سم

ن = $\frac{١}{٢}$ ٢ ⇐ ف = $(\frac{١}{٢}٢)^٢$ = $\frac{١}{٤}$٦ سم

أي أن الجسيم قطع المسافة $\frac{١}{٤}$٦ − ٤ = $\frac{١}{٤}$ ٢ سم

خلال الفترة $\frac{١}{٢}$ ٢ − ٢ = $\frac{١}{٢}$ ث بدءا من الزمن ن = ٢

إذن متوسط السرعة = $\frac{\frac{١}{٤}\,٢}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ ٤ سم/ ث

وبصفة عامة لنفرض أن موقع الجسيم على الخط المستقيم يتحدد بالعلاقة

ف = د (ن) (٤ − ١)

حيث د (ن) دالة في المتغير ن ، ولنحسب متوسط سرعة الجسيم خلال الفترة الزمنية من $ن_١$ إلى $ن_١$ + هـ [انظر الشكل (٤ − ٢)]:

موقع الجسيم عند اللحظة $ن_١$: $ف_١$ = د ($ن_١$)

موقع الجسيم عند اللحظة $ن_٢$:

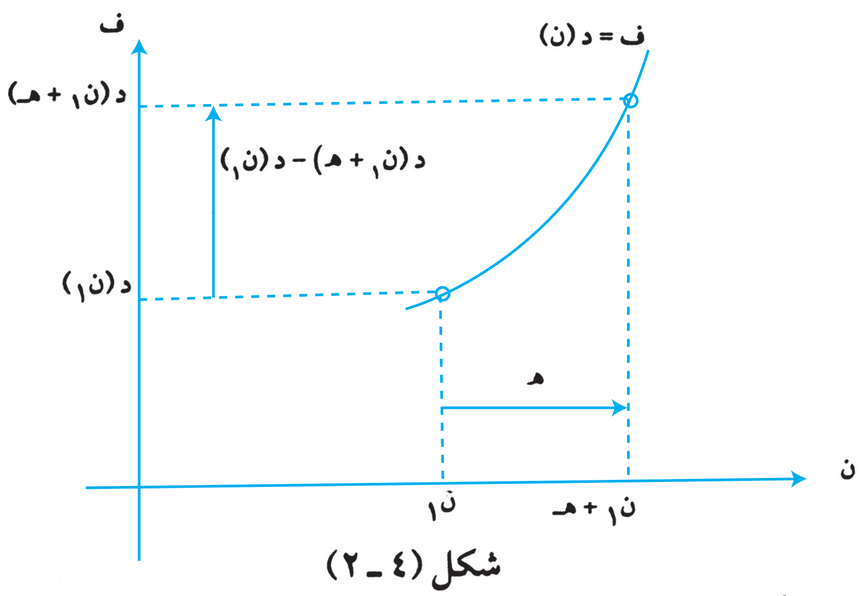
$ف_٢$ = د ($ن_٢$) = د ($ن_١$ + هـ)

إذن المسافة التي قطعها الجسيم خلال الفترة الزمنية

من $ن_١$ إلى $ن_١$ + هـ هي $ف_٢$ − $ف_١$ = د($ن_١$+ هـ) − د ($ن_١$)

وعليه يكون متوسط سرعة الجسيم خلال هذه الفترة هو :

$$\frac{ف_٢ - ف_١}{هـ} = \frac{د(ن_١ + هـ) - د(ن_١)}{هـ} \qquad (٤ - ١)$$



شكل (٤ ـ ٢)

وباستطاعتنا أن نعمم العلاقة (٤ - ١) بين المسافة والزمن إلى :

$$ص = د\,(س)$$

حيث ص دالة حقيقية متصلة في المتغير الحقيقي س . وعنـدئذ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$ فإن ص تتغير من د $(س_١)$ إلى د $(س_١ + هـ)$، أي أن التغير هـ في س يقـابلـه التغير $د(س_١ + هـ) - د\,(س_١)$ في ص .

يسمى المقدار

$$\frac{د\,(س_١ + هـ) - د\,(س_١)}{هـ}$$

حيث هـ ≠ صفراً

معدَّل تغيُّر الدالة

ص = د (س) بالنسبة للمتغير س على الفترة

$[س_١، س_١ + هـ]$. لاحظ أن $\frac{د\,(س_١ + هـ) - د\,(س_١)}{هـ}$ هو ميل المستقيم

ل الذي يمر بالنقطتين ا $(س_١، د\,(س_١))$، ب $(س_١ + هـ، د\,(س_١ + هـ))$

شكل (٤ـ٣)

ولذلك نستخدم الرمز $م(س_١، س_١+ هـ)$ للدلالة على هذه الكمية ،

$$م(س_١، س_١+ هـ) = \frac{د(س_١+ هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

أو : $$م(س_١، س_٢) = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

ملحوظة (٤ ـ ١)

١ - إذا ثُبّت العدد $س_١$ وسُمح للعـدد هـ بأن يتغيّر، فإن $م(س_١، س_١+ هـ)$ تصبح دالـة في المتغير هـ غير معرّفة عند هـ = صفراً.

٢ - بالرجـوع إلى المثال (٤ - ١) يتضح لنا بأن متوسط سرعـة الجسيم على الفترة الزمنية $[ن_١، ن_٢]$ هو معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن ن على هذه الفترة، أي $م(ن_١، ن_٢)$.

مثال (٤-٢)

احسب معدَّل تغير الدالة $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ على الفترة $[٣، ٣,٢١]$

الحـــل :

باعتبار $س_١= ٣$ ، هـ = ٣,٢١ - ٣ = ٠,٢١ فإننا نحصل على

$د(س_١+ هـ) - د(س_١) = \sqrt{٣,٢١-٢} - \sqrt{٣-٢}$

$= \sqrt{١,٢١} - \sqrt{١}$

$= ١,١ - ١$

$= ٠,١$

$$م(س_١، س_١+ هـ) = \frac{د(س_١+ هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

$م\,(٣\,،\,٣,٢١) = \frac{٠,١}{٠,٢١}$

$= \frac{١٠}{٢١}$

$\approx ٠,٤٧٦$

مثال (٤-٣)

أوجد معدَّل تغير ص على الفترة من س = ٢ إلى ٢,٢ ، حيث ص = $٣س^٢ - س^٣$

الحـــل :

$م\,(س_١\,،\,س_١ + هـ) = \frac{د\,(س_١ + هـ) - د\,(س_١)}{هـ}$

حيث $س_١ = ٢$ ، هـ = ٢,٢ − ٢ = ٢ ,٠

$د\,(س_١) = ٣\,س_١^٢ - س_١^٣$

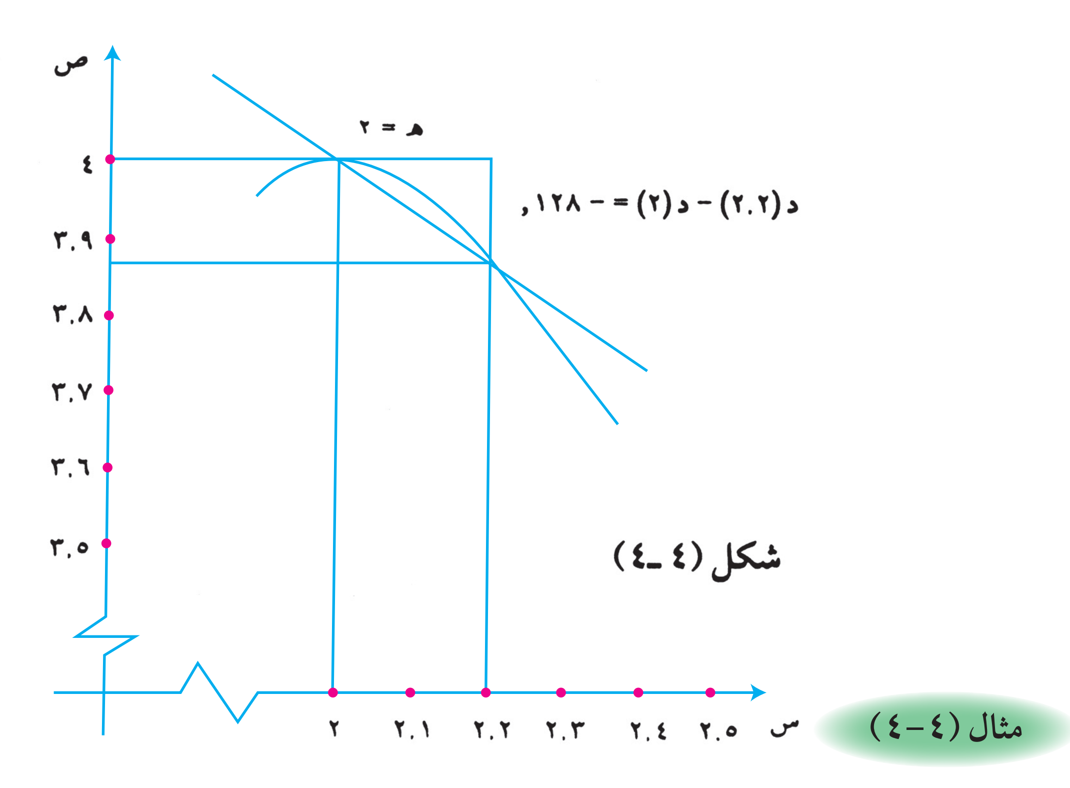
$= ٣\,(٤) - ٨ = ٤$

$د\,(س_١ + هـ) = ٣\,(٢,٢)^٢ - (٢,٢)^٣$

$= (٢,٢)^٢\,(٣ - ٢,٢) = ٣,٨٧٢$

إذن $م\,(٢\,،\,٢,٢) = \frac{٣,٨٧٢ - ٤}{٠,٢} = \frac{-٠,١٢٨}{٠,٢} = -٠,٦٤$

ومن الشكل (٤ − ٤) يتضح لنا أن م < صفر؛ لأن الدالة تتناقص عندما تزداد س من ٢ إلى ٢,٢ .



شكل (٤ ـ ٤)

مثال (٤-٤)

تتمدد صفيحة دائرية بالتسخين . احسب معدل التغير في مساحتها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦سم إلى ٦,١سم .

الحـــل : نفرض أن طول نصف القطر = نق

مساحة الصفيحة = ط نق^{٢} = د(نق)

فنحصل على معدل التغير

$$م(٦ ، ٦,١) = \frac{د(٦,١) - د(٦)}{٦,١ - ٦} = \frac{ط(٦,١)^{٢} - ط(٦)^{٢}}{٠,١}$$

$$= \frac{ط(٦,١ - ٦)(٦,١ + ٦)}{٠,١} = ط(٦,١ + ٦)$$

$$= ١٢,١ ط \approx ٣٨$$

تمارين (٤ – ١)

في التمارين من (١) إلى (٧) أوجد معدل التغير لكل من الدوال المذكورة على الفترة المعطاة، موضحاً إجابتك بالرسم البياني :

(١) د(س) = ٢ س – ١   [٣، ٣,٤]

(٢) د(س) = ٨ – ٥س   [٢، ٢,٢]

(٣) د(ـه) = (ـه + ٢)^{٢} [١,٢، ٣]

(٤) د(س) = س^{٢} + ٣   [٣، ٣,١]

(٥) ل = $\sqrt{\text{ر} + ٣}$ [–٢، ١]

(٦) ص = س^{٣} [–٢، ٢]

(٧) ص = س^{٣} – ١   [٠، $\frac{١}{٢}$]

في التمارين من (٨) إلى (١٣) أوجد معدّل التغيّر لكل دالة على الفترة المذكورة :

(٨) د(س) = ٣ س – ٥   عندما س = ١، هـ = ,٢

(٩) د(س) = س^{٢} – ٢س   عندما تتغير س من ٣ إلى ٤

(١٠) د(ـه) = ـه^{٢} + ـه   عندما تتغير ـه من ٥ إلى ٣

(١١) د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ عندما تتغير س من ٩ إلى ١٠,٢٤

(١٢) د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$ عندما تتغير س من ١ إلى – ١

(١٣) د(س) = |س|

(أ) عندما تتغير س من صفر إلى ١

(ب) عندما تتغير س من صفر إلى -1

(حـ) عندما تتغير س من -1 إلى ١ ، وضح إجابتك بالرسم .

(١٤) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث يكون بعده عن نقطة ثابتة بالسنتيمتر بعد ن ثانية معطي بالمعادلة .

ف = $ن^2 - ٢ن + ٥٠$ احسب

(ا) سرعة الجسيم المتوسطة خلال الثانية الثالثة من حركته .

(ب) سرعته المتوسطة خلال النصف ثانية التالية للثانية الخامسة من حركته .

(حـ) سرعته المتوسطة خلال الفترة من ن= ٢ ث إلى ن = ١ , ٢ث

(د) سرعته المتوسطة خلال الفترة من ن= ١ث إلى ن = ٣ث

(١٥) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته عند اللحظة ن معطاة بالعلاقة ع= $ن^2 + ٢$ سم/ ث . احسب معدل تغير السرعة بين ن = ٢ ثانية، ن = ٣ ثانية .

(١٦) فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروي . احسب معدل التغير في مساحة السطح الكروي للفقاعة عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ ملليمتر إلى ٢ , ٦ ملليمتر، علماً بأن مساحة سطح الكرة هو ٤ط $نق^2$.

(١٧) وعاء أسطواني الشكل طول نصف قطر قاعدته ٧سم فيه ماء . إذا برد الماء بحيث تغير ارتفاعه في الوعاء من١٢سم إلى ١٠سم فأوجد معدل التغير في حجم الماء .

٤ – ٣ مشتقة الدالة :

لنفرض أن معادلة المنحني المبيّن في الشكل (٤ – ٥) هي ص = د (س). لقد عرفنا أنَّ المقدار

$$\frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$

هو ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (س$_1$، د (س$_1$)) وَ (س$_1$ + هـ، د (س$_1$ + هـ)) .

الآن سنثبِّت العدد س$_1$ ونسمح للعدد هـ بأن يتناقص بحيث يبقى موجباً.

من الواضح أنَّ المقدار :

$$\frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$

يصبح دالة في هـ وسنؤكد ذلك بكتابة

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$

حيث هـ ≠ صفراً. تأمّل الشكل (٤ – ٥) ولاحظ أنَّ :

شكل (٤ ـ ٥)

$$\text{م}(\text{هـ}_1) = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}_1) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}_1}$$ = ميل المستقيم ل$_1$ الذي يمر بالنقطتين ا ، ب$_1$.

$$\text{م}(\text{هـ}_2) = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}_2) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}_2}$$ = ميل المستقيم ل$_2$ الذي يمر بالنقطتين ا ، ب$_2$.

$م(هـ_٢) = \frac{د(س_١ + هـ_٢) - د(س_١)}{هـ_٢}$ = ميل المستقيم $ل_٢$ الذي يمر بالنقطتين ا ، $ب_٢$.

. . . إلخ .

ما هي نهاية الدالة م(هـ) عند ما تقترب هـ من الصفر ؟ أي ماذا تمثل النهاية

$$\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

من الناحية الهندسية يمكننا أن نجيب على هـذا السؤال بالعودة إلى الشكل (٤ – ٥) وملاحظة أنــه كلما اقتربت هـ من الصفــر فإن المستقيمات $ل_١$، $ل_٢$، $ل_٣$، . . . تقترب من المستقيم ل المماس للمنحني عند النقطة ا، وعليه نستنتج أنَّ :

$\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ = ميل المماس ل عند النقطة $(س_١، د(س_١))$

نلاحظ في الشكل (٤ – ٥) أن هـ تقترب من الصفر من جهة اليمين لنقطة الصفر، أي من خلال الأعداد الموجبة، وعلى الطالب أن يتحقق من صحة النتيجة عندما تقترب هـ من الصفر من جهة اليسار.

تعريف (٤ – ١)

إذا كانت الدالة الحقيقية د معرفة على الفترة المفتوحة (ا ، ب)

$$د : (ا، ب) \longrightarrow ح$$

وكانت $س_١ \in (ا ، ب)$، فإن النهاية :

$$\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

متى وجدت، تُسمَّى مشتقة الدالة ص = د (س) عند $س_١$، ويرمز لهذه النهاية بالرمز $دَ(س_١)$، ويقال عندئذ إنَّ الدالة د قابلة للاشتقاق عند $س_١$.

ملحوظة (٤ – ٢) :

١ – مما سبق نستنتج أن مشتقة الدالة ص = د (س) عند $س_١$ هي ميل المماس لمنحني الدالة عند النقطة ($س_١$، د ($س_١$)) .

٢ – باعتبار أن س = $س_١$ + هـ فإن اقتراب هـ من الصفر، أي هـ ← ٠ ، يترتَّب عليه أنَّ س تقترب من $س_١$، أي س ← $س_١$ ، فنحصل على الصيغة الأخرى للمشتقة :

$$دَ(س_١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

$$دَ(س_١) = \lim_{س \to س_١} \frac{د(س) - د(س_١)}{س - س_١} \qquad (٤ - ٢)$$

مثال (٤–٥)

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة ص = $س^٢$ عند النقطة س = ١

الحـــل :

د (س) = $س^٢$

د (١) = ١

د (١ + هـ) = $(١ + هـ)^٢$ = ١ + ٢ هـ + $هـ^٢$

$$\frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \frac{(١ + ٢هـ + هـ^٢) - ١}{هـ}$$

= ٢ + هـ

$$دَ(١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} (٢ + هـ)$$

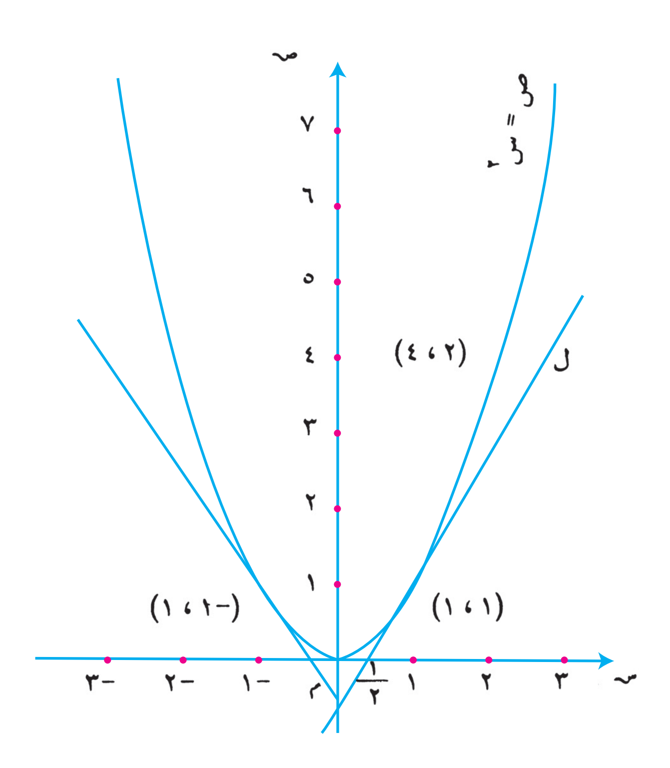
= ٢

لاحظ في الشكل (٤ – ٦) أن المماس لمنحني الـدالة عنـد النقطة (١ ، ١) هـو المستقيم ل وأن ميل ل = ٢ ، مما يؤكد أن مشتقة الدالة عند نقطة ما تساوي ميل المماس للدالة عند تلك النقطة .

لنحسب الآن دَ (س) عند أي نقطة أخرى (س$_١$ ، ص$_١$) على منحنى الدالة ص = س^٢

$$دَ(س_١) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{(س_١ + هـ)^٢ - س_١^٢}{هـ}$$



شكل (٤ ـ ٦)

$$د\bar{}(س_1) = \lim_{هـ \to 0} \frac{س_1^2 + 2 س_1 هـ + هـ^2 - س_1^2}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} 2س_1 + هـ$$

$$= 2س_1$$

ومن ذلك نستنتج أن

$د\bar{}(2) = 2(2) = 4$ = ميل المماس عند (٢، ٤)

$د\bar{}(0) = 2(0) = 0$ = ميل المماس عند (٠، ٠)

$د\bar{}(-1) = 2(-1) = -2$ = ميل المماس عند (- ١ ، ١)

أي أن

$$د\bar{}(س_1) = 2س_1 \qquad (٤ - ٣)$$

هو ميل المماس للمنحنى $ص = س^2$ عند النقطة $(س_1، ص_1)$ وإذا اتفقنا على اعتبار أن ميل المماس للمنحنى عند نقطة ما عليه هو ميل المنحنى عند هذه النقطة فإننا نحصل على النتيجة الهامة :

ميل المنحنى ص = د(س) عند أي نقطة $(س_1، ص_1)$ على المنحنى يساوي المشتقة $د\bar{}(س_1)$ عند تلك النقطة .

مثال (٤-٦)

أوجد مشتقة الدالة ص = ا س + ب عند أي نقطة (س، ص) حيث ا، ب عددان حقيقيّان ثابتان .

الحـــل :

$د(س) = ا س + ب$ (انظر الشكل (٤ – ٧)) .

$د(س + هـ) = ا(س + هـ) + ب$

$د(س + هـ) - د(س) = (ا س + اهـ + ب) - (اس + ب)$

$= اهـ$

$\therefore \quad \dfrac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = ا$

$دَ(س) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها}\ ا$

$= ا$

شكل (٤ ـ ٧)

وكما تعلم من قبل فإن الـدالـة ص = ا س + ب تمثّل خطـاً مستقيماً ميلـه ا، وهـذا يتفق مع نتيجة المثال (٤ – ٥) . أي أنّ ميل المنحنى يتغير بصفة عامّة مـن نقطة إلى أخرى ولكنه يبقى ثابتا إذا كان المنحنى مستقيماً .

والحقيقة أن مفهـوم المشتقة يكتسب أهميّتـه لكونه أسلـوباً تحليليـاً للحصول على ميل المنحنى عندما يكون هذا الميل متغيّراً .

معـدل تغيـر الـدال عند نقطـة :

في البَند السابق اعتبرنا المقدار $\dfrac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ ، هـ ≠ صفراً، مقياساً لمعدّل تغيُّر

الدالة ص = د (س) بالنسبة للمتغيّر س على الفترة [$س_1$، $س_1$ + هـ] ٠ والآن سنعتبر المشتقة :

$$د'(س_1) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$

على أنها معدل تغير الدالة ص = د (س) بالنسبة للمتغير س عند النقطة ($س_1$، د ($س_1$)) ٠ في الشكل (٤ – ٦) مثلاً نجد أن معدّل تغير الدالة ص = $س^2$ يساوي

– ٢ عند النقطة (–١ ، ١)

صفراً عند النقطة (٠ ، ٠)

٢ عند النقطة (١ ، ١)

. . . إلخ .

أما في المثال (٤ – ٦) فإنّ معدل تغير الدالة الخطية ص = ا س + ب هو العدد الثابت ا

السُّــرعــة

والآن لنعـود مــرة أخـرى إلى المثـال (٤ – ١) حيث يتحـرك جسيـم على خط مستقيم حسب المعادلة ف = د (ن) . بما أن موقع الجسيم عند اللحظة $ن_1$ هو د ($ن_1$) وعند اللحظة $ن_1$ + هـ هو د ($ن_1$+ هـ) فإنـه يكون قـد قطع المسافـة د ($ن_1$+ هـ) – د ($ن_1$) خلال الفترة [$ن_1$، $ن_1$ + هـ]، والتي طولها هـ وبذلك يكون متوسط سرعة الجسيم خلال هذه الفترة الزمنية هو ناتج القسمة :

$$\frac{د(ن_1 + هـ) - د(ن_1)}{هـ}$$

ومن الواضح أنَّه كلّما كان العدد هـ صغيراً (دون أن يكون صفراً) كان المقدار

$$\frac{د(ن_1 + هـ) - د(ن_1)}{هـ}$$

تقريباً أفضل لسرعة الجسيم عنـد اللحظة $ن_١$، حسب مفهـومنا الحدسي للسرعة ؛ ولـذا فإن السرعة اللحظية، أو الآنية للجسيم عند اللحظة $ن_١$ تعرَّف بأنها المشتقة :

$$دَ(ن_١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(ن_١ + هـ) - د(ن_١)}{هـ}$$

وبعبارة أخـرى فإن سرعة الجسيم الذي يسير حسب المعـادلة ف = د (ن) عند اللحظة $ن_١$، هي معدل تغير دالة المسافة بالنسبة للزمن عند اللحظة $ن_١$.

وفي الحالة الخاصة ف = $ن^٢$، استناداًإلى المعادلة (٤ – ٣)، فإنّ دَ ($ن_١$) تساوي ٢$ن_١$ فنستنتج أن سرعة الجسيم تساوي.

٢ × ٠ = صفراً عندما $ن_١$ = صفراً

٢ × ١ = ٢ كم/ث عندما $ن_١$ = ١ ث

٢ × ١,٥ = ٣ كم/ث عندما $ن_١$ = ١,٥ ث

. . . إلخ.

ملحوظـة (٤ – ٣)

عندما تكون الدالة د : س ← ص قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في مجال تعريفها، أي عندما تكون دَ (س) موجودة لكل س ∈ س، فإن

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

تصبح دالة جديدة معرفة على س بكاملها، هي دالة المشتقة دَ المعرفة على س.

وقد وجدنا في المثال (٤ – ٥) أنَّ مشتقة الدالة

د (س) = $س^٢$ ، س ∈ ح

هي الدالة : دَ (س) = ٢س ،س ∈ ع

كما توصلنا في المثال (٤ – ٦) إلى أن مشتقة الدالة الخطية

د (س) = أ س + ب

هي الدالة الثابتة : دَ (س) = أ

وكل منهما معرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ع .

مثال (٤–٧)

أوجد مشتقة الدالة د (س) = |س| حيث س ∈ ع عند النقطة س = صفراً، إن وجدت .

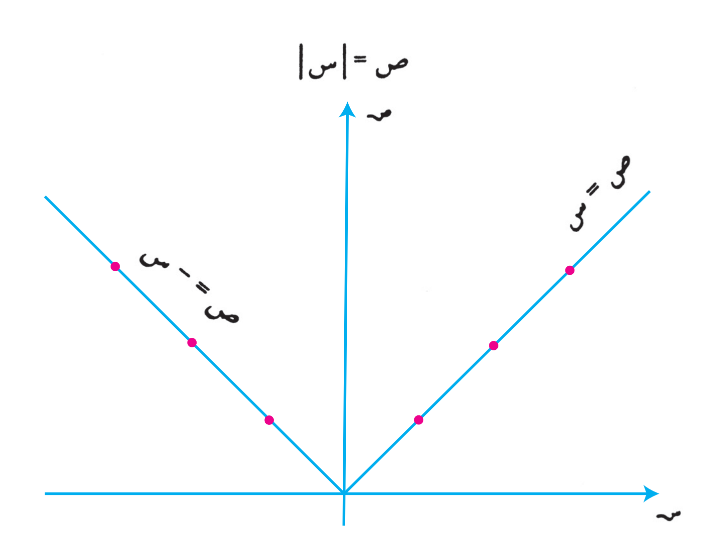
الحـــل :

دَ (٠) = نهـا ـــ هـ ← ٠ (د (٠ + هـ) – د (٠)) / هـ (٤ – ٤)

= نهـا ـــ هـ ← ٠ |هـ| / هـ

بالرجوع إلى المثال (٣ – ٣٤) يتّضح لنا أنَّ هذه النهاية غير موجودة، وهذا يعني أن دالة المقياس د (س) = |س| غير قابلة للاشتقاق عند س = صفراً.

بإمكاننا أن نفسر المشكلة التي واجهتنا في الحصول على مشتقة الدالة د(س) = |س| بالرجوع إلى تمثيلها البياني في الشكل (٤ – ٨)، حيث يتضح لنا أن النقطة (٠ ، ٠) هي نقطة انكسار في منحنى الدالة يتعذر عندها تحديد ميل المماس .



شكل (٤ ـ ٨)

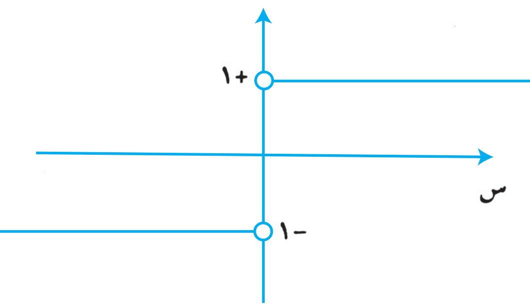
تدريب (٤-١)

تحقق من وجود مشتقة الدالة د (س) = |س|

عند كل س ≠ صفراً، وأن د َ(س) = { ١ عندما تكون س > صفر ، -١ عندما تكون س < صفر }

كما في الشكل (٤ - ٩).

فتستنتج أن مجال تعريف المشتقة دَ هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر، أي ح - {٠}



شكل (٤ ـ ٩)

مثال (٤-٨)

ابحث قابلية الدالة د للاشتقاق إذا كانت د (س) = $\frac{س + ١}{س - ١}$ ، حيث س ≠ ١ .

الحل :

$$د(س + ﻫ) - د(س) = \frac{س + ﻫ + ١}{س + ﻫ - ١} - \frac{س + ١}{س - ١}$$

$$= \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + \text{هـ} + ١) - (\text{س} + ١)(\text{س} + \text{هـ} - ١)}{(\text{س} + \text{هـ} - ١)(\text{س} - ١)}$$

$$= \frac{- ٢\,\text{هـ}}{(\text{س} + \text{هـ} - ١)(\text{س} - ١)}$$

$$\frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \frac{- ٢}{(\text{س} + \text{هـ} - ١)(\text{س} - ١)}$$

$$\text{دَ}(\text{س}) = \text{نها}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{- ٢}{(\text{س} + \text{هـ} - ١)(\text{س} - ١)}$$

$$= \frac{- ٢}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

بما أنَّ $\text{دَ}(\text{س})$ معرفة على $\text{ح} - \{١\}$ فإنَّ :

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في مجالها .

مثال (٤–٩)

ابحث قابلية الدالة د للاشتقاق إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$ حيث $\text{س} \in [٠، \infty)$

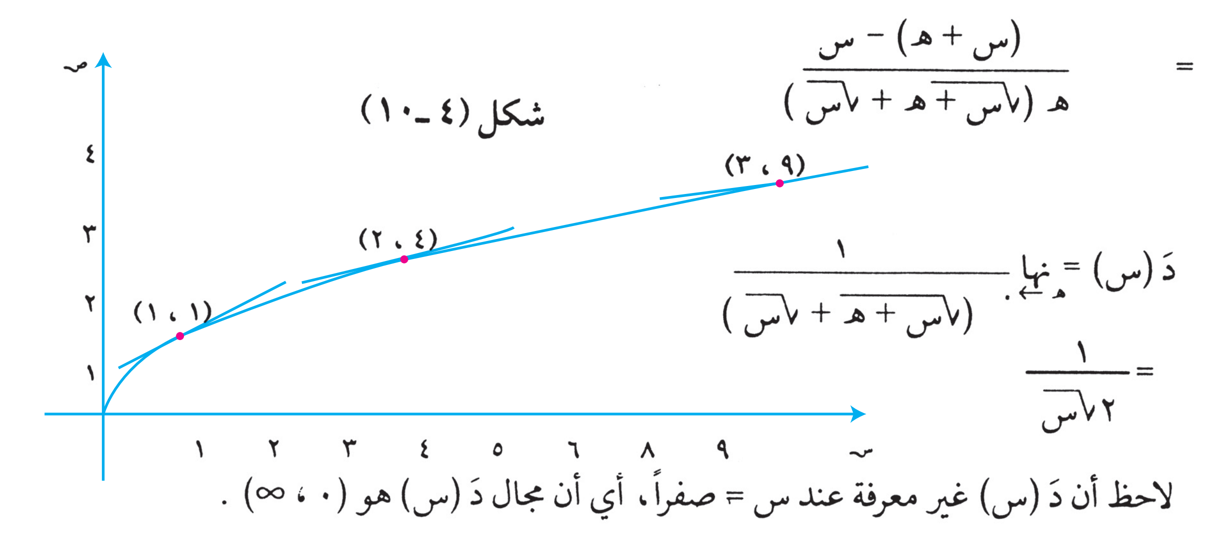
الحـــل :

لكل س في الفترة المفتوحة $(٠ ، \infty)$ لدينا

$$\frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \frac{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\sqrt{س+هـ} - \sqrt{س}}{هـ} \times \frac{\sqrt{س+هـ} + \sqrt{س}}{\sqrt{س+هـ} + \sqrt{س}}$$

$$= \frac{(س+هـ) - س}{هـ\,(\sqrt{س+هـ} + \sqrt{س})}$$



$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{(\sqrt{س+هـ} + \sqrt{س})}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

لاحظ أن دَ (س) غير معرفة عند س = صفراً، أي أن مجال دَ (س) هو (٠ ، ∞) .

كما أن دَ (١) = $\frac{١}{٢\sqrt{١}}$ = $\frac{١}{٢}$ ، دَ (٤) = $\frac{١}{٤}$ ، دَ (٩) = $\frac{١}{٦}$ ، إلخ . . . . . ،

أي أنَّ دَ(س) تتناقص كلّما زادت س،كما يتضح من الشكل (٤ –١٠) حيث يتناقص ميل المنحنى مع تزايد المتغير س . لاحظ أيضاً أن المماس للمنحنى عند نقطة الأصل هو المحور الصادي، الذي ميله غير معرّف .

نختم هذا البند بالحديث عن العلاقة بين قابلية اشتقاق الدالة عند نقطة ما واتصالها عند تلك النقطة . لقد سبق أن وجدنا في الباب الثالث أن دالة المقياس ص = |س| متصلة عند س = صفراً، ثم اكتشفنا في المثال (٤ ـ ٧) أنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة، مما يدل على أن اتصال الدالة لا يترتب عليه أنها قابلة للاشتقاق . ولكن العكس صحيح، أي أن وجود المشتقة عند نقطة ما يضمن اتصال الدالة عند تلك النقطة . وهذا هو فحوى النظرية التالية .

نظرية (٤ ـ ١)

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند $س_١$ فإنها تكون متصلة عند $س_١$

البرهان

من التعريف (٤ ــ ١) نجد أنّ الدالة د قابلة للاشتقاق عند $س_١$ إذا كانت معرفة على فترة مفتوحة حول $س_١$ وكانت النهاية

$$د'(س_١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

موجودة. لنفرض أنّ س هي أي نقطة أخرى في مجال تعريف الدالة د، أي أن $س \neq س_١$.

عندئذ

$$د(س) = د(س_١) + د(س) - د(س_١)$$

$$= د(س_١) + \frac{د(س) - د(س_١)}{س - س_١}(س - س_١)$$

بأخذ نهاية طرفي هذه المعادلة عندما تقترب س من $س_١$ وباستخدام خواص النهايات من الباب الثالث فإنَّ

$$\lim_{س \to س_١} د(س) = \lim_{س \to س_١} د(س_١) + [\lim_{س \to س_١} \frac{د(س) - د(س_١)}{س - س_١}][\lim_{س \to س_١}(س - س_١)]$$

ولكن $\lim_{س \to س_١} د(س_١) = د(س_١)$ لأن $د(س_١)$ عدد ثابت

$$\lim_{س \to س_١} \frac{د(س) - د(س_١)}{س - س_١} = د'(س_١)$$ بالرجوع إلى الصيغة (٤ -٢)

$$\lim_{س \to س_١}(س - س_١) = \text{صفراً}$$

إذن

$$\lim_{س \to س_١} د(س) = د(س_١) + د'(س_١) \times (٠)$$

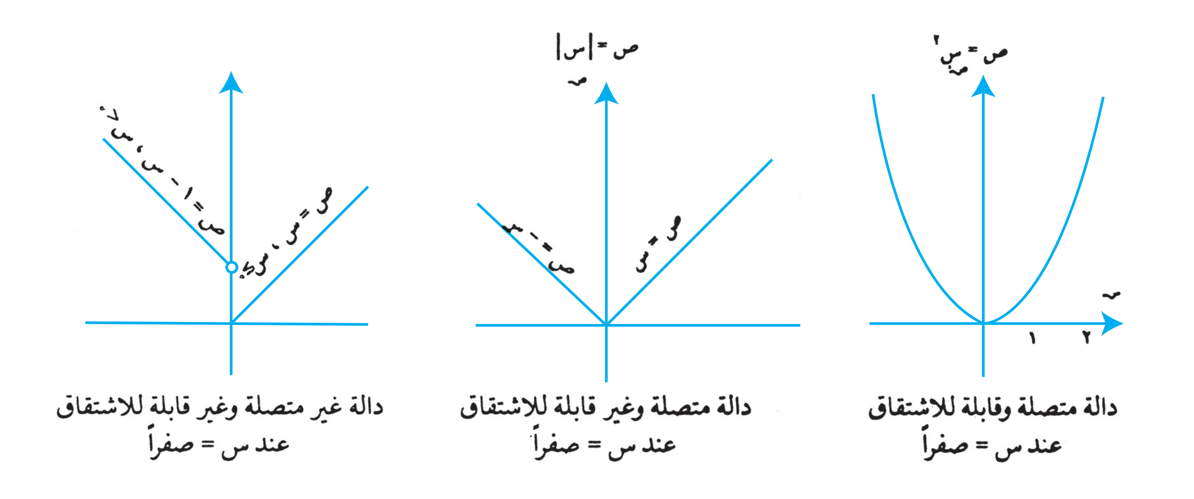
$= د(س_١)$

مما يدل على أن د متصلة عند $(س_١)$

نتيجة (٤-١)

إذا كانت الدالة د غير متصلة عند $س_١$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند $س_١$.

وفي الشكل التالي ثلاثة نماذج تبين الاحتمالات الممكنة عند النقطة س = صفراً، (أو أي نقطة أخرى).



شكل (٤-١١)

تمارين (٤ – ٢)

في التمارين من (١) إلى (٤) استخدم التعريف لإيجاد مشتقة الدالة، إن كان لها وجود.
وحدد مجال تعريف المشتقة ثم احسب قيمتها عند النقطة المعطاة :

(١) د (س) = ٢ س + ٣ عند س = ٢

ارسم الشكل البياني للدالة.

(٢) د (س) = $س^{٢}$ + ٢ س عند س = ٥

(٣) د (س) = $س^{٢}$ – ٥ عند س = ١

ارسم منحنى الدالة والمستقيم المماس لها عند س = ١

(٤) د (س) = $س^{٣}$ أوجد دَ (س) لكل س ∈ ح ثم احسب دَ (١)

(٥) احسب مشتقة الدالة د (س) = $\sqrt{س - ١}$ على الفترة (١ ، ∞)

(٦) د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ∈ ح . أوجد دَ (س) . هل دَ (٠) معرفة ؟ علل إجابتك هندسيا.

(٧) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث يقطع مسافة ف م من نقطة ثابتة في ن ثانية حسب العلاقة : ف = $ن^{٢}$ + ٢ ن . أوجد معدل التغير في المسافة بالنسبة للزمن (يسمى هذا المعدل سرعة الجسيم عند اللحظة ن) ثم أوجد قيمة هذه السرعة عند ن = ٣ .

(٨) يتحرك جسيم على خط مستقيم بسرعة ع حسب العلاقة :

ع = $ن^{٢}$ – ٣ن + ٥ م/ ثانية أوجد معدل التغير في ع ثم أوجد قيمة هذا المعدل عند ن = ٣ ثوان.

(٩) صفيحة معدنية مثلثة الشكل ومتطابقة الأضلاع تتمدد إذا سخنت محافظة على شكلها. أوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة بالنسبة لطول ضلعها. ثم أوجد قيمة هذا المعدل عندما يكون طول الضلع مساويًا ٦سم.

(١٠) تتمدد كرة معدنية بالحرارة، أوجد معدل تغير حجمها بالنسبة لطول نصف قطرها، ثم احسب هذا المعدل عندما يكون طول نصف القطر ٧سم.

٤ - ٤ قواعد الاشتقاق :

الاشتقاق هو عملية إيجاد المشتقة . فإذا كانت لدينا الدالة ص = د (س) فإننا نشتقها بالنسبة للمتغير س للحصول على دَ (س) . وقد جرت العادة على كتابة المشتقة :

$$\text{نها}_{\text{هـ} \leftarrow 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} \qquad (٤ - ٥)$$

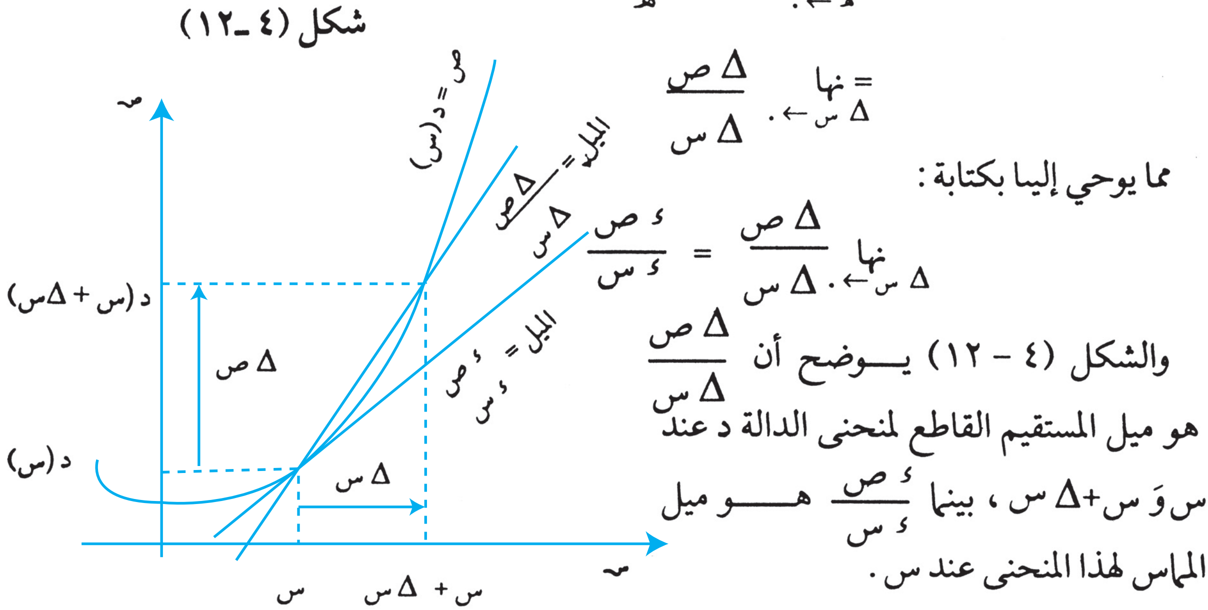
بالصورة دَ (س) أو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، مع مراعاة أنَّ هـذا الرمز الأخير ليس ءص مقسومًا على ءس، وإنما هـو رمز آخـر للنهايـة (٤ - ٥) . ولعلَّه من المفيـد أن نعطي تبريرًا لاختيـار الرمـز $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$. نلاحظ أن المقدار:

$$\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})$$

هـو التغيُّر في ص المترتب على التغيُّر هـ في س، فإذا استخـدمنـا الحرف اليـونـاني Δ «دلتا» للـدلالة على التغيّر فإنّ Δ س = هـ ،Δ ص = د (س + هـ) - د (س)، فنحـصل على المشتقـة

$$\text{دَ}(\text{س}) = \text{نها}_{\text{هـ} \leftarrow 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نها}_{\Delta \text{س} \leftarrow 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$



شكل (٤ ـ ١٢)

مما يوحي إلينا بكتابة :

$$\text{نها}_{\Delta \text{س} \leftarrow 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

والشكل (٤ - ١٢) يـوضح أن $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ هو ميل المستقيم القاطع لمنحنى الدالة د عند س وَ س+Δ س ، بينما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ هـو ميل المماس لهذا المنحنى عند س .

باستخدام تعريف مشتقة الدالة نستنتج الآن قوانين عامة في حساب مشتقات بعض الدوال الأولية . وفيما يلي سنفرض ضمناً أن جميع الدوال التي نعالجها دوال حقيقية معرّفة على فترة أو فترات مفتوحة من الأعداد الحقيقية ، ما لم يذكر خلاف ذلك .

نظرية (٤ - ٢)

مشتقة الدالة الثابتة هي الدالة الصفرية ، فإذا كان د (س) = حـ حيث حـ = عدداً ثابتاً ، فإن دَ(س) = صفراً أو بعبارة أخرى ، $\frac{ء (حـ)}{ء س}$ = صفراً .

البرهان

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س + هـ) - د (س)}{هـ} = \frac{حـ - حـ}{هـ} = صفرًا$$

$$\Leftarrow دَ (س) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} (٠) = صفراً$$

ملحوظة (٤-٤)

من المعروف أنّ الدالة الثابتة يمثّلها بيانيًا خط مستقيم موازٍ للمحور السيني ، وكما يعلم الطالب فإن ميل هذا المستقيم يساوى الصفر.

نظرية (٤ - ٣)

مشتقة دالّة الدرجة الأولى :

$$د (س) = ا س + ب ، س \in ح$$

حيث ا ، ب ثابتان هي الدالة الثابتة

$$دَ (س) = ا ، س \in ح$$

البرهان :

ورد في المثال (٤ – ٦)

مثال (٤–١٠)

(١) مشتقة الدالة ص = ٣ س – ٥ هي :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}\,(٣\ س - ٥)$$

$$= ٣$$

ومشتقة الدالة ص = $-\frac{٣}{٤}$ س + ٧ هي : $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{٣}{٤}$

(٢) مشتقة ص = س هي $\frac{ءص}{ءس} = ١$

تعريف (٤ – ٢)

إذا كانت كل من د وَ ر دالة في المتغير س فيرمز لدالة المجموع بالرمز د + ر ولدالة حاصل الضرب بالرمز د . ر ولدالة ناتج القسمة بالرمز $\frac{د}{ر}$، ونعرّفها على الترتيب كما يأتي :

(د + ر) (س) = د (س) + ر (س)

(د . ر) (س) = د (س) . ر (س)

$\frac{د}{ر}$ (س) = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث ر (س) ≠ صفراً

من التعريف نحصل على صيغة القوة ن للدالة د :

$د^{ن}$ (س) = (د × . . . . ×د) (س) حيث د مكررة ن من المرات ، ن ∈ ط

= د (س) × . . . × د (س) (د (س) مكررة ن مرة)

= $[د(س)]^{ن}$

نظرية (٤ – ٤)

إذا كانت كل من الدالتين د وَ ر قابلة للاشتقاق عند س فإن دالّة المجموع د + ر قابلة للاشتقاق عند س ويكون

$$\text{(د + ر)}'\text{(س)} = \text{د}'\text{(س)} + \text{ر}'\text{(س)}$$

البـرهـان :

$$\text{(د + ر)}'\text{(س)} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{(د + ر)(س + هـ)} - \text{(د + ر)(س)}}{\text{هـ}}$$ (ومن التعريف ٤ – ٢)

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{[\text{د(س + هـ)} + \text{ر(س + هـ)}] - [\text{د(س)} + \text{ر(س)}]}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \left[\frac{\text{د(س + هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}} + \frac{\text{ر(س + هـ)} - \text{ر(س)}}{\text{هـ}} \right]$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د(س + هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}} + \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ر(س + هـ)} - \text{ر(س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{د}'\text{(س)} + \text{ر}'\text{(س)}$$

وبتعميم هذه النظرية لأي عدد من الدوال، نحصل على :

نتيـجـة (٤–٢)

إذا كانت كلّ من الدوال د_1، د_2، . . . ، $\text{د}_\text{ن}$ قابلة للاشتقاق عند س فإنَّ :

$$(د_1 + د_2 + ... + د_ن)'(س) = د'_1(س) + د'_2(س) + ... + د'_ن(س)$$

مثال (٤-١١)

إذا كانت د (س) = (٥س + ٣) + (٢ − س)

فإن دَ (س) = $\frac{ٴ}{ٴس}$ (٥س + ٣) + $\frac{ٴ}{ٴس}$ (٢ − س)

= ٥ + (− ١) = ٤

تدريب (٤-٢)

عمّم النظرية (٤ − ٤) على حالة مجموع ثلاث دوال، ثم أربع دوال.

نظرية (٤ − ٥)

إذا كانت كل من الدالتين د ، ں قابلة للاشتقاق عند س، فإنَّ دالة حاصل الضرب د . ں قابلة للاشتقاق عند س، ويكون:

$$(د . ں)'(س) = د'(س) . ں (س) + د (س) . ں'(س)$$

البرهان:

$$(د . ں)'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(د . ں)(س + هـ) - (د . ں)(س)}{هـ}$$ من التعريف (٤ − ١)

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) . ں(س + هـ) - د(س) . ں(س)}{هـ}$$

وبإضافة د (س) . ں (س + هـ) إلى البسط وطرحها منه ثم إعادة ترتيب الحدود،

نجد أن:

$$(د . ر)'(س) = \lim_{هـ \to 0} \left[\frac{د(س + هـ) . ر(س + هـ) - د(س) . ر(س + هـ)}{هـ} \right.$$

$$\left. + \frac{د(س) . ر(س + هـ) - د(س) ر(س)}{هـ} \right]$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} . ر(س + هـ)$$

$$+ \lim_{هـ \to 0} د(س) . \frac{ر(س + هـ) - ر(س)}{هـ}$$

$$= د'(س) . ر(س) + د(س) . ر'(س)$$

حيث $\lim_{هـ \to 0} ر(س + هـ) = ر(س)$ لأن ر قابلة للاشتقاق فهي متصلة عند س، حسب النظرية (٤ – ١).

نتيجة (٤ – ٣)

إذا كان حـ عدداً ثابتاً وكانت د دالة قابلة للاشتقاق عند س فإنَّ $(حـ . د)'(س) = حـ . د'(س)$

البرهان :

نتيجة مباشرة للنظرية (٤ – ٥) والنظرية (٤ – ٢).

نتيجة (٤ – ٤)

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س فإنَّ الدالة $د^2$ أيضاً قابلة للاشتقاق عند س ومشتقتها $(د^2)'(س) = 2د(س) . د'(س)$

البرهان :

بتطبيق النظرية (٤ – ٥) على $د^2 = د . د$ نجد أنَّ

$(د^٢)َ(س) = (د . د)َ(س)$

$= دَ(س) . د(س) + د(س) . دَ(س)$

$= ٢ د(س) . دَ(س)$

مثال (٤-١٢)

أوجد مشتقة الدالة ص = (٥س − ٣) $(٧ - \frac{١}{٣}س)$

الحـــل :

نطبق النظرية (٤-٥) باعتبار د(س) = ٥س − ٣، ر(س) = $٧ - \frac{١}{٣}س$ فنحصل على:

$$\frac{ءص}{ءس} = \left(\frac{ء}{ءس}(٥س - ٣)\right) . \left(٧ - \frac{١}{٣}س\right) + (٥س - ٣) . \frac{ء}{ءس}\left(٧ - \frac{١}{٣}س\right)$$

$= ٥\left(٧ - \frac{١}{٣}س\right) + (٥س - ٣)\left(-\frac{١}{٣}\right)$ من النظرية (٤ − ٣)

$= ٣٥ - \frac{٥}{٣}س - \frac{٥}{٣}س + ١$

$= -\frac{١٠}{٣}س + ٣٦$

مثال (٤-١٣)

أوجد مشتقة الدالة ص = $(٤س - ١)^٢$ عند س = $\frac{١}{٢}$

الحـــل :

بتطبيق النتيجة (٤ − ٢)، حيث د(س) = ٤س − ١ ،

فإن $\frac{دص}{دس} = ٢(٤س - ١) \frac{د}{دس} (٤ س - ١)$

$= ٢ (٤س - ١) (٤)$

$\frac{دص}{دس} = ٨ (٤س - ١)$ وعند س = $\frac{١}{٢}$ تكون

قيمة $\frac{دص}{دس} = ٨ (٢ - ١)$

$= ٨$

مثال (٤-١٤) :

أوجد مشتقة الدالة ص = س (٢ س + ١) (١ - س)

الحــل :

نطبق النظرية (٤ - ٥) على حاصل ضرب الدالتين

د (س) = س (٢س + ١) ، ر (س) = ١ - س فنحـصل على

$\frac{دص}{دس} = (\frac{د}{دس}$ [س (٢س + ١)]) (١ - س) + س (٢ س + ١) $\frac{د}{دس}$ (١ - س)

ولكن

$\frac{د}{دس}$ [س (٢س + ١)] = (١) (٢س + ١) + س (٢) من النظرية (٤ - ٥)

$= ٤س + ١$

إذن :

$\frac{دص}{دس} = (٤س + ١) (١ - س) + س (٢ س + ١) (-١)$

$= -6$ س$^2 + 2$ س $+ 1$

تدريب (٤-٣)

(١) حاول أن تستنتج قانون مشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال :

(د . ر . ع)َ = دَ . ر . ع + د . رَ . ع + د . ر . عَ

من النظرية (٤ – ٥).

(٢) إذا كانت ص = ٣ س^2 + ٥ س ، ع = – س^2 + ٣ س ، ف = س – ٢

فأوجد كلا من : صَ ، عَ ، فَ

ثم أوجد وَ إذا علمت أن و = ص . ع . ف

نظرية (٤ – ٦)

مشتقة الدالة

د (س) = س^{ن} ، س ∈ ح

حيث ن ∈ {٢، ٣، ٤، . . . .} هي الدالة

دَ (س) = ن س$^{ن-1}$ ، س ∈ ح

أو بعبارة أخرى

$$\frac{ء(س^{ن})}{ءس} = ن\,س^{ن-1} \qquad (٤ – ٥)$$

البرهـان :

سنستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات النظرية :

أولاً : عندما $ن = ٢$ فإنَّ :

$$\frac{د(س^٢)}{دس} = ٢ س . س^- \qquad \text{من النتيجة (٤ – ٤)}$$

$$= ٢ س$$

بما يحقق القاعدة في هذه الحالة .

ثانـياً : لنفرض الآن أنَّ القاعدة صحيحة للعدد الطبيعي $ن_١ > ٢$ ،

$$\frac{د س^{ن_١}}{دس} = ن_١ س^{ن_١ - ١} \qquad (٤ – ٦)$$

ثـالثًا : نطبق النظرية (٤ – ٥) على الدالة $س^{ن_١ + ١} = س . س^{ن_١}$

فنحصل على : $\frac{د س^{ن_١ + ١}}{دس} = \frac{دس}{دس} س^{ن_١} + س \frac{د س^{ن_١}}{دس}$

$= س^{ن_١} + س (ن_١ س^{ن_١ - ١})$ من المعادلة (٤ – ٦)

$= (ن_١ + ١) س^{ن_١}$

بما يحقق القاعدة (٤ – ٥) للعدد الطبيعي $ن_١ + ١$

إذن القاعدة صحيحة لكل عدد طبيعي أكبر من ١

ملحـوظـة (٤–٥)

سبق أن عـولجت حالتـا $ن =$ صفراً، $ن = ١$ من خـلال النظريتين : (٤ – ٢)، (٤ – ٣) على الترتيب

مثال (٤-١٥)

أوجد مشتقة الدالة ص = $س^٣$ (٢س + ١)

الحـــل :

من النظرية (٤ – ٥) فإنَّ :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء(س^٣)}{ءس}(٢س + ١) + س^٣ . \frac{ء}{ءس}(٢س + ١)$$

$$= (٣ س^٢)(٢ س + ١) + س^٣ (٢)$$ من النظرية (٤ – ٦)

$$= ٨ س^٣ + ٣ س^٢$$

ويمكن الحصول على هذه النتيجة بطريقة أخرى، وذلك بكتابة الدالة على الصورة

$$ص = ٢س^٤ + س^٣$$

ثم تطبيق النظرية (٤ – ٤) . ستجد أنَّ :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}(٢ س^٤) + \frac{ء}{ءس}(س^٣)$$

$$= ٢ \times \frac{ء(س^٤)}{ءس} + \frac{ء(س^٣)}{ءس}$$ من النتيجة (٤ – ٣)

$$= ٢(٤س^٣) + ٣ س^٢$$ من النظرية (٤ – ٦)

$$= ٨ س^٣ + ٣ س^٢$$

لعلّ في المثال (٤ – ١٥) ما يوحي بالنتيجة الآتية :

نتيجـة (٤ – ٥)

مشتقة كثيرة الحدود من الدرجة ن

$$ص = ا_. + ا_١ س + ا_٢ س^٢ + ... + ا_ن س^ن$$

المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية لكل عدد طبيعي ن ، هي كثيرة الحدود من الدرجة ن – ١

$$\frac{ءص}{ءس} = ا_١ + ٢ا_٢ س + ... + ن ا_ن س^{ن-١} \quad لكل\ س \in ح$$

البرهـان :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس} (ا_. + ا_١ س + ا_٢ س^٢ + ... + ا_ن س^ن)$$

$$= \frac{ء}{ءس} (ا_.) + \frac{ء}{ءس} (ا_١ س) + \frac{ء}{ءس} (ا_٢ س^٢) + ... + \frac{ء}{ءس} (ا_ن س^ن)$$

$$= . + ا_١ \frac{ءس}{ءس} + ا_٢ \frac{ءس^٢}{ءس} + ... + ا_ن \frac{ءس^ن}{ءس}$$

$$= ا_١ + ٢ ا_٢ س + ... + ن ا_ن س^{ن-١}$$

مثال (٤–١٦)

احسب ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = ٣س^٤ + ٢ س^٣ - س + \frac{٧}{٥}$

عند س = ١

الحـل :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس} (٣س^٤ + ٢س^٣ - س + \frac{٧}{٥})$$

$$= ٣ \frac{ء س^٤}{ء س} + ٢ \frac{ء س^٣}{ء س} - \frac{ء س}{ء س} + \frac{ء}{ء س} \left(\frac{٧}{٥} \right)$$

$$= ٣ (٤ س^٣) + ٢ (٣ س^٢) - ١ + ٠$$

$$= ١٢ س^٣ + ٦ س^٢ - ١$$

وهي مشتقة كثيرة الحدود $د (س) = ٣ س^٤ + ٢ س^٣ - س + \frac{٧}{٥}$ ، وقد كان بإمكاننا الحصول عليها من تطبيق النتيجة (٤ - ٥) مباشرة.

ميل المماس لمنحنى الدالة عند س = ١ هو قيمة المشتقة $\frac{ء ص}{ء س}$

عند س = ١ ، أي :

$$دَ (١) = ١٢ (١)^٣ + ٦ (١)^٢ - ١ = ١٧$$

مثال (٤-١٧)

أوجد قيم س التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى الدالة

$$ص = ٣ س^٤ + ٢ س^٣ - س + \frac{٧}{٥}$$

مساويًا للعدد - ١

الحـــل :

بما أن ميل المماس = دَ (س) فالمطلوب إيجاد جذور المعادلة دَ (س) = -١،

ومن المثال السابق نجد أن هذا يعطينا :

$$١٢ س^٣ + ٦ س^٢ - ١ = -١$$

$$٦ س^٢ (٢ س + ١) = صفراً$$

$\Leftarrow$ س = صفراً، س = $-\frac{١}{٢}$

لعلَّـه من المفيد أن نتـوقّف هنا قليـلاً ونتساءل : كيف كـان يمكن أن نحصل على المعلومـات المطلوبـة في المثالين السابقين دون اللجوء إلى الاشتقـاق؟ لا شك بأنَّه لن يكون أمامنـا من وسيلة سوى الـرسم البياني، والقياس، وعلى الطـالب أن يتصوّر المجهـود المطلوب لرسم الـدالة ص = ٣س^{٤} + ٢س^{٣} − س + $\frac{٧}{٥}$. ثم مشكلة الحصـول على جواب دقيق من خـلال هذه الـوسيلة التقريبيـة في جوهـرها . لقـد استطعنا في المثـالين السابقين بفضل مشتقـة الدالـة أن نحصل على المعلومات المطلـوبة بسهولة ودقـة دون الحاجة إلى معرفة أي شيء عن منحنى الـدالة . بل سنجد فيما بعد أن معرفة المشتقة تساعدنا على رسم الدالة .

نظرية (٤ – ٧)

إذا كانت الدالة د قابلـة للاشتقاق عند س وكانت د (س) ≠ صفراً ، فإنَّ الدالّة

ر = $\frac{١}{د}$. أيضاً قابلة للاشتقاق عند س، ويكون :

$$ر'(س) = -\frac{د'(س)}{[د(س)]^{٢}} \qquad (٤ - ٧)$$

البرهـان :

$$ر'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ر(س + هـ) - ر(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ} \left[\frac{١}{د(س + هـ)} - \frac{١}{د(س)} \right]$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ} \left[\frac{د(س) - د(س + هـ)}{د(س + هـ) \,.\, د(س)} \right]$$

$$= \left[- \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} \right] \left[\lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{د(س+هـ) \, . \, د(س)} \right]$$

وحيث إن د قابلة للاشتقاق، وبالتالي فهي متصلة، فإنَّ: $\lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{د(س+هـ)} = \frac{١}{د(س)}$ ،

ونحصل على :

$$ر'(س) = - د'(س) \, . \, \frac{١}{[د(س)]^٢}$$

مثال (٤-١٨)

أوجد مشتقة الدالة ص = $\frac{١}{س^٢ + س - ٢}$ عند أي عدد حقيقي باستثناء العددين ١ ، -٢ ثم احسب قيمة المشتقة عند س = - ١

الحـل :

نطبق النظرية (٤ - ٧) باعتبار أن الدالة د (س) = $س^٢ + س - ٢$ قابلة للاشتقاق عند أي عدد حقيقي، كما أنَّ

$$س^٢ + س - ٢ = (س - ١)(س + ٢) \neq صفراً$$

إذا كان س ≠ ١، - ٢، فنحصل على :

$$\frac{ءص}{ءس} = - \frac{د'(س)}{[د(س)]^٢}$$

$$= - \frac{٢س + ١}{(س^٢ + س - ٢)^٢}$$

وعندما تكون س = -١ فإنّ :

$$\frac{ءص}{ءس} = - \frac{٢(-١) + ١}{(١ - ١ - ٢)^٢}$$

$$= \frac{١}{}$$

مثال (٤-١٩)

أوجد $\frac{ء}{ءس}$(س$^{-٧}$) حيث س ≠ صفراً

الحـــل :

$\frac{ء}{ءس}$(س$^{-٧}$) = $\frac{ء}{ءس}$ $\left(\frac{١}{س^{٧}}\right)$

= $\frac{-١}{(س^{٧})^{٢}}$ $\frac{ء}{ءس}$ (س^{٧})

= $\frac{-١}{س^{١٤}}$ × ٧ (س^{٦})

= $\frac{-٧}{س^{٨}}$

= −٧ س$^{-٨}$ حيث س ≠ صفراً

والواقع أنَّ هذه النتيجة قابلة للتعميم على النحو التالي :

$\frac{ءس^{ن}}{ءس}$ = ن س$^{ن-١}$ حيث ن عدد صحيح سالب ، س ≠ صفرًا،

وسنترك البرهان للطـالب . وبما أن هذه القاعدة صحيحـة في حالة ن = صفرًا كما أنها صحيحة لأي عدد صحيح موجب، حسب النظريتين (٤ - ٣) وَ (٤ - ٦) فإننا نحصل على :

نتيجة (٤ - ٦)

$\frac{ءس^{ن}}{ءس}$ = ن س$^{ن-١}$ لكل ن ∈ ص (٤ - ٨)

حيث س ≠ صفراً عندما ن ≤ ١

والنظرية الآتية هي تعميم للنظرية (٤ – ٧):

نظرية (٤ – ٨)

إذا كانت كل من الدالتين د، ر قابلة للاشتقاق عند س، وكانت د (س) ≠ صفراً، فإن الدالة ع = $\frac{ر}{د}$ أيضاً قابلة للاشتقاق عند س، ويكون

$$ع\prime (س) = \frac{د (س) . ر\prime (س) - ر (س) . د\prime (س)}{[د (س)]^{٢}} \qquad (٤ - ٩)$$

البرهان:

بكتابة ع = $\frac{ر}{د}$ = ر . $\frac{١}{د}$

وبتطبيق النظرية (٤ – ٥) فإنَّ:

$$ع\prime (س) = ر\prime (س) \frac{١}{د (س)} + ر (س) . \left(\frac{١}{د}\right)\prime (س)$$

ومن النظرية (٤ – ٧) نحصل على:

$$ع\prime (س) = \frac{ر\prime (س)}{د (س)} - ر (س) \frac{د\prime (س)}{[د (س)]^{٢}}$$

$$= \frac{د (س) . ر\prime (س) - ر (س) . د\prime (س)}{[د (س)]^{٢}}$$

ملحوظة (٤–٦)

عندما تكون الدالة ر(س) = ١ فإن ر\prime (س) = صفراً وتتحول القاعدة (٤ – ٩) إلى الصيغة (٤ – ٧).

مثال (٤–٢٠)

أوجد مشتقة الدالة ص = $\frac{٢س + ٣}{٣س - ٢}$ حيث س ≠ $\frac{٢}{٣}$

ثم احسب ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند النقطة $(. ، \frac{-٣}{٢})$

الحـــل :

بتطبيق القاعدة (٤ – ٩) حيث م (س) = ٢ س + ٣، د (س) = ٣ س – ٢ نجد أنَّ :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(٣س - ٢)(٢) - (٢س + ٣)(٣)}{(٣س - ٢)^٢}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١٣}{(٣س - ٢)^٢}$$

وعندما س = صفراً فإنَّ : $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{١٣}{٤}$

تدريب (٤ – ٤)

أعد برهان النظرية (٤ – ٨) باعتبار ع = $\frac{م}{د}$ ⟺ ع . د = م وتطبيق النظرية (٤ – ٥).

ثم استنتج النظرية (٤ – ٧) باعتبارها حالة خاصة من النظرية (٤ – ٨).

تدريب (٤–٥)

أكمل الجدول الآتي تلخيصًا لقواعد الاشتقاق التي تعلَّمتها :

الدالة	المشتق
ص = د(س)	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = دَ(س) = $\lim_{\text{هـ} \to 0}$ $\frac{\text{د(س+هـ) − د(س)}}{\text{هـ}}$ = $\lim_{\Delta \text{س} \to 0}$ $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$
ص = د(س) + ر(س)	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =
ص = د(س) . ر(س)	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =
ص = $\frac{1}{\text{د(س)}}$	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = حيث د(س) ≠ □
ص = $\frac{\text{ر(س)}}{\text{د(س)}}$	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = حيث . . . . ≠ □
ص = حـ	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = حـ عدد حقيقي ثابت
ص = س	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =
ص = اس + ب	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =
ص = حـ . د(س)	حـ عدد حقيقي ثابت
ص = $\text{س}^{\text{ن}}$	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = { س ∈ ح عندما ن ∈ { } س ∈ ح* عندما ن ∈ { }

تمارين (٤ - ٣)

أوجد الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية :

١) $د(س) = س^{٤}$

٢) $د(س) = ٨ س^{٣}$

٣) $د(س) = س^{٦} - ٣ س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} - ١$

٤) $د(س) = س^{٢ن}$ حيث ن عدد طبيعي

٥) $د(س) = ا س^{ن+١}$ حيث ا عدد ثابت، ن عدد صحيح. متى يتعذر وجود المشتقة عند س = صفرًا ؟

٦) $د(س) = س (س^{٢} + ٦)$

٧) $د(س) = (\frac{١}{٢} س^{٢} - ١) (س^{٤} + ٥س + ٢)$

٨) $د(س) = \frac{١}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

٩) $د(س) = (٢س + ٣) (\frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{س})$، $س \neq$ صفراً

١٠) $د(س) = \frac{٢س + ١}{س + ٥}$ ، $س \neq -٥$

١١) $د(و) = \frac{و^{٢}}{٣ و - ١}$ ، $و \neq \frac{١}{٣}$

١٢) $د(ن) = \frac{ن^{٢} + ٢ن - ١}{(ن + ١)(ن - ١)}$ ، $ن \neq \pm ١$

أوجد قيمة المشتقة لكل من الدوال الآتية عند النقطة المذكورة :

١٣) د (س) = $\frac{٥}{س^٢ + ٩}$ عند س = صفرًا

١٤) د (س) = $\frac{-٢}{س^٢ + ٣}$ عند س = ١

١٥) د (س) = (س − ١) (س − ٢) (س − ٣) عند س = ١

أوجد دَ (س) في التمارين من (١٦) إلى (٢٦).

١٦) د (س) = (س^٢ − ٣ س + ٥) (س^٢ − ٣)

١٧) د (س) = (س^٢ + ٢س − ٢) (س^٢ + ٢س + ٣)

١٨) د (س) = (س^٢ + س − ٣) (س^٢ + س − ٥)

١٩) د (س) = (س^٢ + س + ٢)^٢

٢٠) د (س) = (س^٢ − س − ١)^٢

٢١) د (س) = (س + ١)^٣

٢٢) د (س) = (س + ١)^٤

٢٣) د (س) = $\frac{س^٢ + ٣}{س + ٢}$ ، س ≠ −٢

٢٤) د (س) = $\frac{س + ٢}{س^٢ + ١}$

٢٥) د (س) = $\frac{(س + ١)(س + ٢)}{س^٢ - ٣}$ ، س ≠ ± $\sqrt{٣}$

٢٦) د (س) = $\frac{(س^٢ + ٢س)}{س^٢ - ٩}$ ، س ≠ ± ٣

ابحث قابلية اشتقاق الدالة في التمارين من (٢٧) إلى (٣١):

٢٧) $د(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س^٢ + ٢س + ٣}$

٢٨) $د(س) = \frac{س^٢ + س - ٤}{س^٢ + س + ٤}$

٢٩) $د(س) = (س + ١)(س^٢ - ١)$

٣٠) $د(س) = (س + ٣)(س^٢ - ٩)$

٣١) $د(س) = (س - ١)(س^٢ - س - ٢)$

٣٢) $د(ك) = \frac{ك + ١}{(ك - ٢)(ك + ٢)}$ ، $ك \neq \pm ٢$ احسب $دَ(٠)$.

٣٣) $د(س) = \frac{س(س + ١)}{(س - ١)(س + ٢)}$ ، $س \neq ١ ، - ٢$ احسب $دَ(٠)$.

٣٤) أوجد النقط على المنحنى $ص = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س + ٥$ التي يكون عندها $\frac{ءص}{ءس} =$ صفرًا

(٣٥) أوجد النقط على المنحنى $ص = ٢ س^٣ + ٥ س^٢ + ٧$ التي يكون عندها $\frac{ءص}{ءس} = ١٦$

(٣٦) ما هي نقط المنحنى $ص = (س + ٢)^٣$ التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور السيني؟

٣٧) ما هي نقط المنحنى $ص = س^٣$ التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم $ص = س$؟ وضّح إجابتك بالرسم.

(٤ – ٥) تطبيقات هندسية وفيزيائية

أشرنـا في البند (٤ – ٣) إلى العـلاقة بين مشتقـة الدالّـة وميل المماس للمنحنى الذي يمثلهـا، ولعلّ فكـرة المشتقة ظهـرت أوّل مـا ظهرت لأسبـاب منهـا حساب ميل المماس للمنحنى، ومنهـا خدمـة أغراض الفيـزياء في حسـاب السرعة والتسـارع، وأصبحت أداة لا غنى عنها في صيـاغه قوانين الحركة وقوانين فيزيائية أخرى.

وسنقدم هنا بعض النماذج الهندسية والفيزيائية لتطبيقات المشتقة:

تطبيقات هندسية :

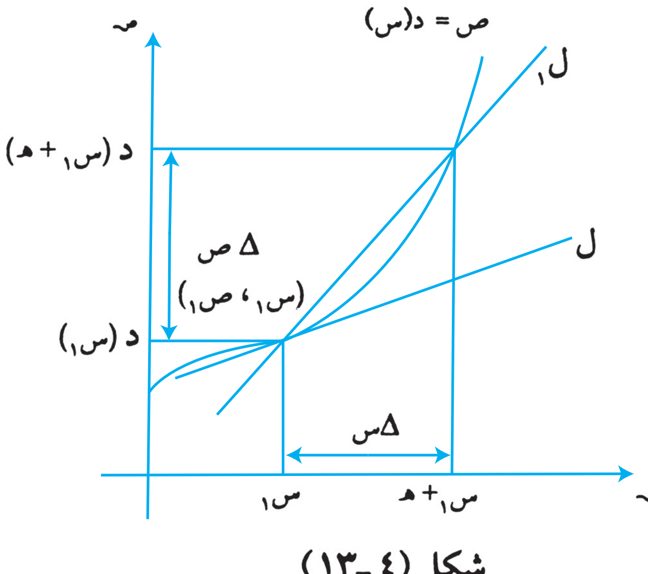
لنفرض أن الشكل (٤ – ١٣) يمثّل منحنى الدالة ص = د (س)، وأن ($س_١$، د ($س_١$)) نقطة ما على هذا المنحنى.

إذا كانت هـ ≠ صفراً فإن

($س_١$ + هـ ، د ($س_١$ + هـ)) تمثل نقطة أخرى على المنحنى ومن الواضح أنَّ :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

هو ميل المستقيم $ل_١$ ، الذي يمرّ بهاتين النقطتين. كما سبق أن ذكرنا أن النهاية $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ ~



شكل (٤ ـ١٣)

إذا وجدت فهي عدد حقيقي يساوي ميل المماس ل للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (س$_1$، د (س$_1$)) = (س$_1$، ص$_1$)، وتسمى مشتقة الدالّة عند س$_1$ ويرمز لها بالرمز دَ (س$_1$)، نستنتج من ذلك أن معادلة المستقيم ل الذي يمر بالنقطة (س$_1$، ص$_1$) والذي ميله دَ (س$_1$) هي :

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = دَ(س_1) \Leftrightarrow ص - ص_1 = دَ(س_1)\,(س - س_1) \qquad (٤ - ١٠)$$

وهي معادلة المماس ل في النقطة (س$_1$، ص$_1$)

وإذا كان المستقيم ع عموديا على المماس ل ويمرّ بنقطة التماس (س$_1$، ص$_1$) كما في الشكل (٤ - ١٤)، فإن ميل المستقيم ع الذي

نسمّيه **العمود** (الناظم) يساوي

$$- \frac{١}{دَ(س_1)}$$

إذا كانت دَ (س$_1$) ≠ صفراً، وعليه

تصبح معادلة العمود ع :

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = - \frac{١}{دَ(س_1)}$$

شكل (٤ ـ ١٤)

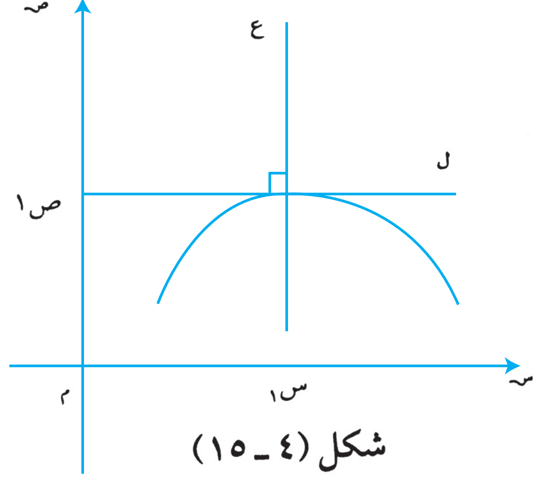
أو

$$ص - ص_1 = - \frac{١}{دَ(س_1)}\,(س - س_1) \qquad (٤ - ١١)$$

ملحوظة (٤-٧)

إذا كانت دَ (س$_1$) = صفرًا فإن المماس ل يكون موازيًا للمحور السيني كما هو موضّح في

الشكل (٤ – ١٥)، ومعادلته ص = ص١ وفي هذه الحالة فإن العمود ع يصبح موازيًا للمحور الصادي ومعادلته بالتالي هي س = س١



شكل (٤ ـ ١٥)

مثال (٤-٢١)

أوجد معادلة كل من المماس والعمود لمنحنى

الدالة ص = $\frac{١}{س}$ عند س = ١

الحــل :

$$دَ(س) = \frac{-١}{س^٢}$$

هو ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{١}{س}$ عنـد النقطة التى إحـداثيها السيني س. إذن ميل المماس عند النقطة س= ١ هو: $دَ(١) = \frac{-١}{(١)^٢} = -١$

معادلة المماس

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = دَ(س_١) \qquad \text{حيث } س_١ = ١، ص_١ = ١$$

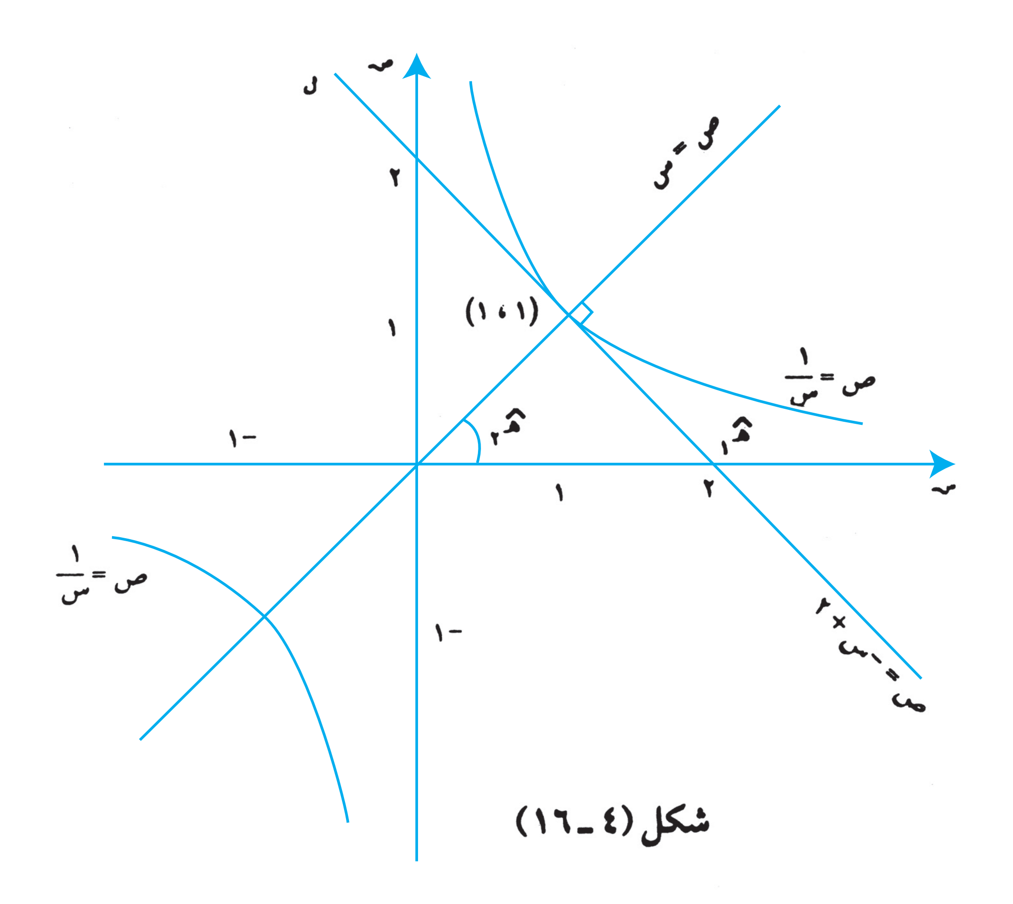
$$\frac{ص - ١}{س - ١} = -١ \quad \Leftarrow \quad ص = -س + ٢$$

معادلة العمود :

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = -\frac{١}{دَ(س_١)}$$

$$\frac{ص - ١}{س - ١} = ١$$

$$ص = س$$



شكل (٤ ـ ١٦)

ملحوظة (٤-٨)

نلاحظ في الشكل (٤ – ١٦) أن الزاوية $ه_١$ التي يصنعها المماس ل مع الاتجاه الموجب للمحور السيني تتحدد من العلاقة ظا $\hat{ه}_١$ = ميل ل = $دَ(س_١)$ = −١ ، ٠ ≤ $ه_١$ ≤ ١٨٠°

⇐ $ه_١$ = ١٣٥°

بينما الزاوية $ه_٢$ التي يصنعها العمود ع مع الاتجاه الموجب للمحور السيني تتحدد من :

$$ظا\ \hat{ه}_٢ = ميل\ ع = -\frac{١}{دَ(س_١)} = ١ \qquad ٠ \le ه_٢ \le ١٨٠°$$

⇐ $ه_٢$ = ٤٥°.

مثال (٤-٢٢)

أوجد نقط منحنى الـدالة د (س) = ٢س^{٣} - ٣ س^{٢} + ١ التي يكون عنـدها المماس مـوازيًا للمحور السيني.

الحـــل :

دَ (س) = ٢ × ٣ س^{٢} - ٣ × ٢ س

دَ (س) = ٦ س^{٢} - ٦س

يكون المماس موازيا للمحور السيني عندما يكون ميله = صفرا،

أي عندما دَ (س) = ٦س (س - ١) = صفرا

⇐ س = صفرا أو س = ١

د (.) = ١، د (١) = ٢ - ٣ + ١ = صفرا

إذن يكون المماس موازيا للمحور السيني عند كل من النقطتين (٠ ، ١)، (١ ، ٠)

تطبيقات فيزيائية

سنـوجّه اهتمامنـا الآن إلى التطبيقـات الفيزيـائيـة . لنفرض أنَّ جسيمًا يتحـرك على خط مستقيم بحيث يتحدّد موقعه (أي بعده عن نقطة ثابتة على المستقيم) بواسطة العلاقة :

ف = د (ں)

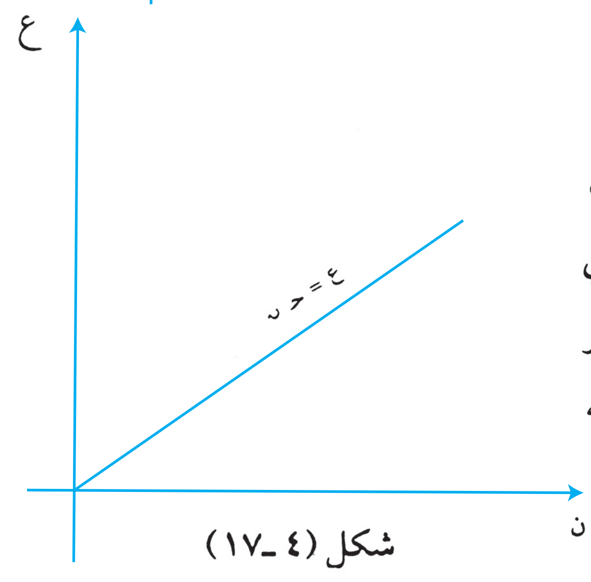
حيث ف هي الإزاحة (المسافة الموجهة)، ں متغيّر الزمن، د دالة قابلة للاشتقاق.

من المعلوم أن $\dfrac{د(ن_1 + هـ) - د(ن_1)}{هـ}$

هو متوسط سرعة الجسيم خلال الفترة من $ن_1$ إلى $ن_1$ + هـ وفي النهاية عندما تئول هـ إلى الصفر فإن النهاية $\lim_{هـ \to 0} \dfrac{د(ن_1 + هـ) - د(ن_1)}{هـ}$

كما سبق أن قدّمنا من قبل تعريفًا لسرعة الجسيم اللحظية (الآنيّة) التي نسمّيها سرعة الجسيم عند اللحظة $ن_1$، أي أنّ السرعة عند $ن_1$ هي دَ ($ن_1$)، فعلى سبيل المثال إذا سقط جسيم عند اللحظة ن = صفرًا تحت تأثير جاذبية الأرض فقد دلت التجارب على أن الإزاحة التي يقطعها هي ف = $\frac{1}{2}$ حـ $ن^2$ حيث حـ = تسارع الجاذبية الأرضية : ٩,٨٠م/$ث^2$ مما سبق نستطيع أن نقول بأنَّ سرعة هذا الجسيم عند اللحظة ن هي :

$$ع = \frac{ءف}{ءن} = \frac{1}{2} حـ \times 2 ن = حـ ن$$



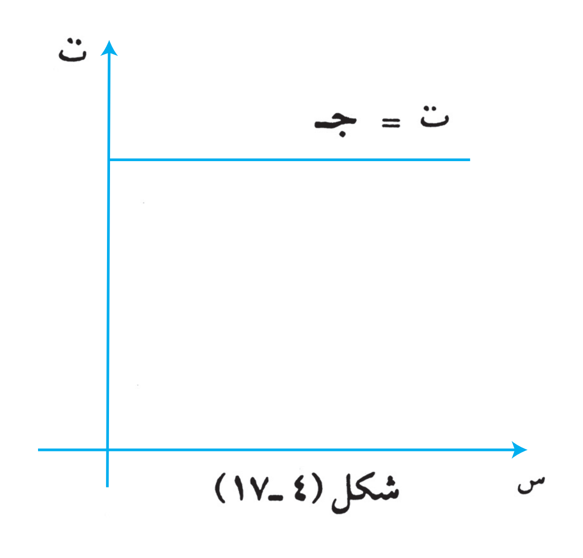
شكل (٤ ـ ١٧)

أي أن السرعة تتزايد بانتظام مع تزايد الزمن، كما تدلّ على ذلك العلاقة الخطية بين ع ، ن في الشكل (٤ – ١٧). كما أنَّ السرعة هي معدل تغير الإزاحة بالنسبة للزمن، فإن التسارع ت يُعرَّف بأنَّه معدّل تغير السرعة بالنسبة للزمن.

أي أن :

$$ت = \frac{د ع}{د ن} = جـ$$

وكما هـو معـروف، فـإن تسـارع الجسيم أثناء سقـوطه يبقى ثـابتا، ويسـاوي تسارع الجاذبيــة، كما هـــو واضح مـن الشكل (٤-١٧).



شكل (٤ـ١٧)

مثال (٤-٢٣)

من نقطة على سطح الأرض قـذف جسيم رأسيـا لأعلى وكانت الإزاحة التي يقطعـها (اعتباراً من نقطة القذف) في ن من الثواني بدءاً من لحظة القذف هي

ف = ٢٤,٥ ن − ٤,٩ ن^{٢} متراً

أوجد :

أ) الزمن الذي يعود بعده الجسيم إلى النقطة التى قذف منها .

ب) السرعة التي قذف بها الجسيم .

جـ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم .

د) اللحظة التي تكون عندها سرعة الجسيم ١٤,٧م/ ث .

هـ) تسارع الجسيم في كل لحظة .

الحـــل :

(أ) في اللحظة ن = صفراً انطلق الجسيم من مكانه على سطح الأرض، حيث ف = صفرا.

يعود الجسيم إلى نقطة انطلاقه على سطح الأرض عندما تكون

ف = صفرا ⇐ ٢٤,٥ ن − ٤,٩ ن^{٢} = صفرا

⇐ ن (٢٤,٥ − ٤,٩ ن) = صفرا

⇐ ن = صفرا أو ن = $\frac{٢٤,٥}{٤,٩}$ = ٥ ث

بما أنّ : ن = صفـرا هي لحظة الانطـلاق، فإنّ الجواب المطلـوب هو لحظـة العودة إلى نقطـة الانطلاق = ٥ث

(ب) ع (ن) = $\frac{د ف}{د ن}$ = ٢٤,٥ − ٢(٤,٩) ن

= ٢٤,٥ − ٩,٨ ن

هي السرعـة عنـد اللحظـة ن. والسـرعـة التي انطلق بها الجسيم هي ع (ن) عنـدما تكـون ن= صفراً، أي :

سرعة الانطلاق = ع (.) = ٢٤,٥ م/ ث

(جـ) يصل الجسيم إلى أقصى ارتفاع عندما تصبح السرعة صفراً، أي عندما

ع(ن) = ٢٤,٥ − ٩,٨ ن = صفراً

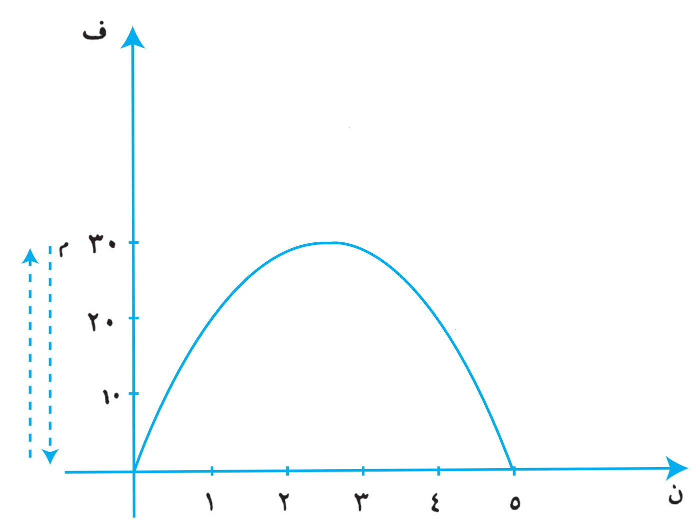
وهذا يتحقق عندما :

ن = $\frac{٢٤,٥}{٩,٨}$ = ٢,٥ ث

وعند هذه اللحظة يكون الارتفاع

ف (٢,٥) = ٢٤,٥ (٢,٥) – ٤,٩ (٢,٥)^٢

= ٣٠,٦٢٥م



د) اللحظة التي تكون عندها سرعة الجسيم ١٤,٧ م/ث هي قيمة ن التي تحقق المعادلة

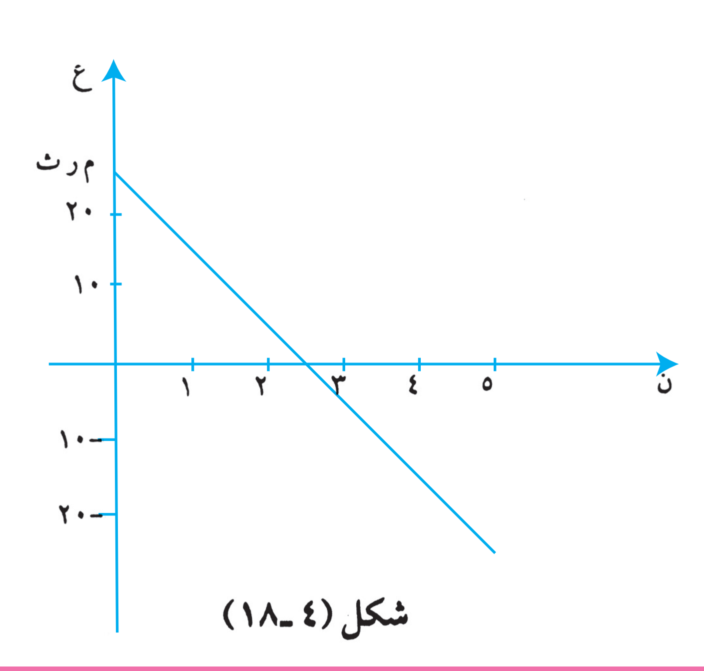
ع = ٢٤,٥ – ٩,٨ ن = ١٤,٧

⇐ ٩,٨ ن = ٩,٨

⇐ ن = ١ ث

لاحظ أن الجسيم يصل إلى هذه السرعة بعد ثانية واحدة من انطلاقه، أي وهو صاعد. أما إذا كان المطلوب هو إيجاد اللحظة التي تصل فيها سرعته إلى ١٤,٧م/ث وهو هابط، فإنّ إشارة السرعة تصبح سالبة، ويكون الجواب حل المعادلة

ع = ٢٤,٥ – ٩,٨ ن = –١٤,٧



شكل (٤-١٨)

⇐ ٩,٨ ٮ = ٣٩,٢

⇐ ٮ = ٤ ث

أي أن السرعة تكون موجبة (إلى أعلى) من ن = صفراً إلى ن = ٢,٥ ث، ثم تتحول إلى سالبة (إلى أسفل) من ن = ٢,٥ ث إلى ن = ٥ ث. انظر الشكل (٤ – ١٨).

هـ) ت = عَ (ن) = – ٩,٨م/ ث^{٢}

أي أنَّ الجسيم يتحرك بتسارع ثابت هو تسارع الجاذبية الأرضية التي تشدّه إلى أسفل، فتتناقص سرعته وهو صاعد خلال الفترة [٠ ، $\frac{١}{٢}$ ٢] ، ولكنها تتزايد أثناء الهبوط خلال الفترة [$\frac{١}{٢}$٢ ، ٥].

تمارين (٤ - ٤)

في التمارين من (١) إلى (٥) أوجد معادلة المماس والعمودي لكل من المنحنيات التالية عند النقط المعطاة موضحاً إجابتك بالرسم في التمارين (١)، (٢)، (٥) :

١) ص = ٢س + ١ عند س = $\frac{١}{٢}$

٢) ص = س^{٢} - ٢ س + ٥ عند س = ٢

٣) ص = س^{٣} - ٢ س^{٢} عند س = ١

٤) ص = $\frac{١}{س - ١}$ حيث س ≠ ١

أ) عند س = صفراً ب) عند س = ٣

٥) ص = ١ - (س + ١)^{٢} عند س = -١

٦) أوجد نقط المنحنى ص = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥ التي يكون المماس عندها موازيا للمحور السيني.

٧) أوجد نقط المنحنى ص = $\frac{١}{س}$ + س التي يكون عندها ميل العمود على المماس $\frac{١}{٣}$

٨) أوجد مشتقة الدالة د (س) = $\frac{٢س - ٣}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢ ثم أوجد النقط الواقعة على منحنيها والتي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم س + ص + ٧ = صفراً.

أوجد زاوية المماس مع المحور السيني الموجب.

٩) أوجد العدد ا بحيث يكون المستقيم ص = ٢س + ٣ مماسا للمنحنى ص = س^{٢} + ا .

في التمارين من (١٠) إلى (١٥) أوجد السرعة والعجلة عند قيم ن المعطاة مستخدماً السنتيمتر والثانية كوحدات للمسافة والزمن:

١٠) $ف = ن^{٢} - ٣ن + ٥$ ، $ن = ٢$ ث

١١) $ف = ٣ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ٥ن$ ، $ن = ٠$ ث

١٢) $ف = ١٢٨ن - ١٦ن^{٢}$ ، $ن = ٢$ ث

١٣) $ف = \frac{ن + ٢}{ن^{٢} + ١}$ ، $ن = ١$ ث

١٤) $ف = (ن^{٢} + ن - ١)(ن^{٢} + ن + ٢)$ ، $ن = ٢$ ث

١٥) $ف = \frac{ن^{٢} - ٣}{ن^{٢} + ٢}$ ، $ن = ٢$ ث

١٦) يتحرك جسيم في خط مستقيم فيقطع إزاحة ف قدما بعد ن ثانية

بحيث $ف = ن^{٤} - ٢ن^{٣} + ن^{٢} - ٥$

أوجد أ) الزمن الذي تنعدم عنده سرعة الجسيم

ب) عجلة حركة الجسيم حين تنعدم سرعته.

١٧) يتحرك جسيم في اتجاه ثابت من نقطة ثابتة و فيقطع إزاحة ف متراً خلال زمن مقداره ن ثانية بحيث $ف = ن^{٣} - ٤ن^{٢} + ٣ن$

أوجد أ) الزمن الذي يعود الجسيم بعده إلى نقطة و.

ب) السرعة الابتدائية للجسيم.

ج) عجلة الجسيم عندما يعود إلى نقطة و.

١٨) يتحرك جسيم رأسيا لأعلى ولأسفل في خط مستقيم واحد بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بعد زمن ن ثانية هو ف = ١٢٨ ن − ١٦ ن^{٢} قدم

أوجد

أ) سرعة الجسيم عند أي لحظة .

ب) مجموعة القيم ن ≤ صفراً والتي تكون عندها السرعة موجبة .

جـ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض .

د) سرعة الجسيم الابتدائية .

هـ) ارسم منحنى كل من دالتي المسافة والسرعة .

١٩) يتحرك جسيم في خط مستقيم وس بحيث يكون بعده بالأمتار بعد ن ثانية من نقطة و هو: ف = ٢ن^{٣} − ٢١ن^{٢} + ٦٠ ن − ٢ أوجد أقصى بعد يصل إليه الجسيم من نقطة و، وعجلة الجسيم عندئذ واتجاهه .

٢٠) قذف جسيم رأسيا لأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ن ثانية هو ف = ١٦ ن (٦ − ن) «قدم»

أوجد

أ) سرعة الجسيم بعد ن ثانية وكذلك تسارعه .

ب) سرعة قذف الجسيم .

جـ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم .

د) الزمن الذي بعـده تكون سرعة الجسيم مساويـة ٣٢ قدم/ ث وهو صاعـد وكذلك وهو هابط .

٢١) جسيم يتحرك في خط مستقيم فإذا كانت سرعته بعد ن ثانية من بدء حركته هي

ع (ن) = ن٢ - ٣ ن + ٢ م/ ث فأوجد

أ) سرعة الجسيم الابتدائية .

ب) متى يسكن الجسيم لحظيا وما قيمة عجلته حينئذ ؟

٢٢) قذف جسيم رأسيا لأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث كان بعده عن سطح الأرض بعد ن ثانية هو

ف = ١٩,٦ن - ٤,٩ن٢ متر

أوجد

أ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم .

ب) عجلته .

جـ) سرعته الابتدائية .

٤ - ٦ قاعدة التسلسل

لنفرض أن ص دالة في المتغير س حسب العلاقة

$$ص = (س^٢ - ١)^٣ \qquad (٤ - ١٢)$$

وأن المطلوب هو إيجاد المشتقة $\frac{ءص}{ءس}$. لكي نتمكن من تطبيق قواعد الاشتقاق الواردة في البند (٤ - ٤) ينبغي أولاً أن نجري عملية التكعيب على المقدار $س^٢ - ١$ للحصول على

$$ص = (س^٢ - ١)(س^٤ - ٢س^٢ + ١)$$

$$= س^٦ - ٣س^٤ + ٣س^٢ - ١$$

ثم نجري عملية الاشتقاق

$$\frac{ءص}{ءس} = ٦س^٥ - ١٢س^٣ + ٦س$$

ولكن لو اعتبرنا المقدار $س^٢ - ١$ متغيراً جديداً، وليكن $ع = س^٢ - ١$، لأصبحت المعادلة (٤ - ١٢) بدلالة هذا المتغير على الصورة $ص = ع^٣$

عندئذ نلاحظ أن $\frac{ءص}{ءع} = ٣ع^٢$

$$= ٣(س^٢ - ١)^٢$$

وأنَّ $\frac{ءص}{ءع} . \frac{ءع}{ءس} = ٣(س^٢ - ١)^٢ (٢س)$

$$= ٦س^٥ - ١٢س^٣ + ٦س$$

$$= \frac{ءص}{ءس}$$

بصفة عامة لنفرض أن سـ ، ع ، صـ فترات حقيقية مفتوحة ، وأنّ

د : سـ ← ع بحيث ع = د (س)

ر : ع ← صـ بحيث ص = ر (ع)

لقد وجدنا فيما سبق أنَّ بإمكاننا تعريف الدالة :

ر ٥ د : سـ ← صـ

بحيث ر ٥ د (س) = ر (د (س)) لكل س ∈ سـ

تسمى الدالة ر ٥ د **محصّلة** الدالتين د ، ر .

والمطلوب هو إيجاد مشتقة ص = ر ٥ د (س) = ر (د (س)) بالنسبة للمتغير س ، أي

$$\frac{ءص}{ءس} = (ر ٥ د)' (س)$$

نظرية (٤ - ٩)

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س ، والدالة ر قابلة للاشتقاق عند ع = د(س) ، فإن الدالة المحصلة ر ٥ د قابلة للاشتقاق عند س ، ويكون

(ر ٥ د)' (س) = رَ (ع) . دَ (س) (٤ - ١٣)

وإذا اعتبرنا ص دالة في المتغير س بحيث

ص = ر (د (س)) = ر (ع)

ع = د (س)

فإن المعادلة (٤ - ١٣) والتي تعرف **بقاعدة التسلسل** تأخذ الشكل :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \cdot \frac{ءع}{ءس} \qquad (٤ - ١٤)$$

البرهــان :

غير مطلوب

مثال (٤-٢٤)

إذا كانت ص = $(س^{٢} - ١)^{٦}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحــل :

باعتبار ص = ر (ع) = $ع^{٦}$ ، ع = د (س) = $س^{٢} - ١$

يتضح لنا أن ص = ر ٥ د (س) فنطبق الصيغة (٤ - ١٤) لقاعدة التسلسل :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \cdot \frac{ءع}{ءس}$$

$$= (٦ع^{٥}) (٢س)$$

$$= ١٢س (س^{٢} - ١)^{٥}$$

مثال (٤-٢٥)

أوجد مشتقة الدالَّة د (س) = $(س^{٣} + ٢س^{٢} - ٤)^{١٢}$ بالنسبة للمتغير س

الحــل :

إذا افترضنا أن ع = $س^{٣} + ٢س^{٢} - ٤$

وأن ص = ع ^{١٢}

فإنَّه يتَّضح لنا أنَّ ص = د (س) هي تحصيل دالتين، وبتطبيق القاعدة (٤ - ١٤) نحصل على:

$$دَ(س) = \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \cdot \frac{ءع}{ءس}$$

$$= (١٢ ع^{١١}) (٣س^{٢} + ٤س)$$

$$= ١٢ (س^{٣} + ٢ س^{٢} - ٤)^{١١} (٣ س^{٢} + ٤ س)$$

نتيجة (٤ - ٧):

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق فإن الدالة

$$ص = د^{ن} (س) = [د (س)]^{ن}$$

حيث ن عدد صحيح، د (س) ≠ صفراً عندما تكون ن ≥ ١، أيضاً قابلة للاشتقاق، ويكون:

$$\frac{ءص}{ءس} = ن [د (س)]^{ن-١} دَ(س)$$

البرهان:

باعتبار د (س) = ع يصبح لدينا:

$$ص = ع^{ن}$$

وبتطبيق قاعدة التسلسل نحصل على:

$$\frac{ص ء}{س ء} = \frac{ص ء}{ع ء} \cdot \frac{ع ء}{س ء}$$

$$= (ن ع^{ن-1}) \cdot دَ(س)$$ من النتيجة (٤ – ٦)

$$= ن [د(س)]^{ن-1} دَ(س)$$

مثال (٤-٢٦)

أوجد مشتقة الدالة ص $= \frac{1}{(س^2 + 1)^3}$ عند س = –١

الحــل :

على افتراض أنَّ : ع = س^{2} + ١، فإن

$$ص = \frac{1}{ع^3} = ع^{-3}$$

وبتطبيق النتيجة (٤ – ٧) فإنَّ

$$\frac{ص ء}{س ء} = \frac{ص ء}{ع ء} \cdot \frac{ع ء}{س ء}$$

$$= (-3 ع^{-4}) (2 س)$$

$$= -6 س (س^2 + 1)^{-4}$$

$$= \frac{-6 س}{(س^2 + 1)^4}$$

وعندما س = – ١ فإن

$$\frac{ص ء}{س ء} = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{8}$$

نظرية (٤ – ١٠)

إذا كانت الدالة د موجبة وقابلة للاشتقاق فإنَّ جذرها التربيعي $ر(س) = \sqrt{د(س)}$ دالة تقبل الاشتقاق ويكون $ر'(س) = \frac{د'(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$

البرهان :

لنفرض أن $ص = ر(س) = \sqrt{ع}$ ، حيث $ع = د(س)$.

إذن $ر'(س) = \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} . \frac{ءع}{ءس}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{ع}} د'(س)$ من المثال (٤ – ٩)

$= \frac{د'(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$

تدريب (٤–٦)

أثبت النظرية (٤ – ١٠) بتربيع طرفي المعادلة $ر(س) = \sqrt{د(س)}$ ثم استخدام قواعد الاشتقاق المعروفة لديك .

ملحوظة (٤– ٩)

(١) نلاحظ أن النظرية (٤ – ١٠) تنص على أن مشتقة الدالة

$ر(س) = [د(س)]^{\frac{١}{٢}}$ هي الدالة

$ر'(س) = \frac{١}{٢} [د(س)]^{-\frac{١}{٢}} د'(س)$ (٤ – ١٥)

وذلك بناء على القاعدة :

$$\frac{د}{دس}(س^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} س^{\frac{1}{2}-1} \quad ، س \neq صفراً \quad (٤ - ١٦)$$

وقاعدة التسلسل (٤ - ١٤)

والقاعدة (٤ - ١٦) قابلة للتعميم (البرهان غير مطلوب) إلى :

$$\frac{د}{دس}(س^{\frac{م}{ن}}) = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-1} \qquad (٤ - ١٧)$$

لأي عدد نسبي $\frac{م}{ن}$ شريطة أن يكون $س^{\frac{م}{ن}-1}$ معرفًا . وعليه فإن تطبيق قاعدة التسلسل على الدالة

$ه(س) = [د(س)]^{\frac{م}{ن}}$ تؤدي إلى الصورة العامة للقاعدة (٤ - ١٥) :

$$\frac{د}{دس}[د(س)]^{\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن}[د(س)]^{\frac{م}{ن}-1} دَ(س) \qquad (٤ - ١٨)$$

(٢) لاحظ أنّ المعادلة (٤ - ١٧) هي حالة خاصة من (٤ - ١٨) عندما تكون د(س) = س

مثال (٤-٢٧)

أوجد مشتقة كلّ من :

(١) $ص = س^{\frac{3}{7}}$

(٢) $ص = (س^{2} - س + ٦)^{\frac{3}{7}}$

الحـــل :

(١) باستخدام القاعدة (٤ - ١٧) فإنَّ :

$$\frac{د}{دس}(س^{\frac{٣}{٧}}) = \frac{٣}{٧} س^{\frac{٣}{٧} - ١}$$

$$= \frac{٣}{٧} س^{\frac{-٤}{٧}}$$ حيث س ≠ صفراً

(٢) $ص = (س^٢ - س + ٦)^{\frac{٣}{٧}}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٧}(س^٢ - س + ٦)^{\frac{٣}{٧} - ١} \times \frac{د}{دس}(س^٢ - س + ٦)$$ من (٤ - ١٨)

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٧}(س^٢ - س + ٦)^{-\frac{٤}{٧}} (٢س - ١)$$

تمارين (٤ - ٥)

في التمارين من (١) إلى (٥) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ باستخدام

أ) الاشتقاق المباشر بعد التعبير عن ص بدلالة س.

ب) قاعدة التسلسل.

(١) $ص = ع^{٣} - ٢ع + ١$ ، $ع = س^{٢}$

(٢) $ص = ع^{٢}$ ، $ع = س^{٢} + س - ١$

(٣) $ص = ع^{٣}$ ، $ع = \sqrt{س} + ١$

(٤) $ص = ع^{٢} + ٦ع - ١$ ، $ع = س^{٢} - ٢س + ٣$

(٥) $ص = ع^{٤} + ٢ع^{٢} + ١$ ، $ع = س + \frac{١}{س}$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية في التمارين من (٦) إلى (١٣)

(٦) $د(س) = \sqrt{س^{٢} + ٣س + ٦}$

(٧) $د(س) = (س^{٣} + س^{٢} - ٢)^{٩}$

(٨) $ص = (س^{٢} - ٢س + ٦)^{\frac{٣}{٢}}$

(٩) $ص = \left(\frac{١}{س^{٢} + ٤}\right)^{٦}$

(١٠) $ص = \sqrt{\frac{س - ٤}{س - ١}}$ حيث $س \notin [١ ، ٤)$

(١١) $ص = \left(\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + ٤}\right)^{\frac{١}{٢}}$

(١٢) ص = $(س + ٢)^{٤}\ \sqrt{س^{٢} + ١}$

(١٣) ص = $(س^{٣} + ٣س^{٢} + ٦س)^{٤}$

(١٤) إذا كانت د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ١}$ فبين أن مجال الدالة

هو (- ∞ ، -١] U [١، ∞) أوجد دَ (س) وعين مجالها .

٤ - ٧ معـدّلات التغـير المرتبطـة ببعضـها

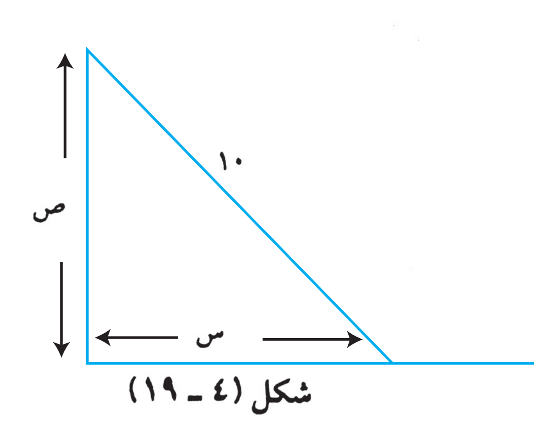
لعلّك تذكر تفسيرنا للمشتقة بأنها معدّل تغيّر «لحظي» لكمية ص بالنسبة لأخرى س. في الأمثلة القادمة ستتعرّض لعدّة متغيّرات س، ص، ع، . . . ترتبط ببعضها البعض بواسطة قوانين تحدّدها طبيعة الأمثلة، ويتغيّر كل منها مع الزمن ن وسنرى كيف يمكن حساب معدّلات تغيّر بعض هذه المتغيّرات من معرفة معدّلات تغيّر الأخريات.

مثال (٤-٢٨)

يرتكز سُلّم طوله ١٠ أمتار على حائط رأسي عال. إذا كان طرف السلّم الأسفل ينزلق على الأرض أفقيًا بعيدًا عن الحائط بمعدّل $\frac{1}{2}$ متر/ ثانية فاحسب معدّل انزلاق طرفه الأعلى على الحائط حينما يكون الطرف الأعلى على بعد ٦ أمتار من الأرض.

الحـل :

افرض أن س هو بعد الطرف الأسفل عن الحائط وَ ص هو بعد الطرف الأعلى عن الأرض. دعنا نرمز للزمن بالرمز ن . المعدّل المعطى هو $\frac{ds}{dn} = \frac{1}{2}$ متر/ ثانية، المعدّل المطلوب هو $\frac{dص}{dن}$



شكل (٤ ـ ١٩)

لنبحث الآن عن قانون يربط بين ص وَ س؛ بما أن الانزلاق لا يغيّر طول السُلّم فإننا نستنتج أنَّ :

$$\sqrt{س^2 + ص^2} = ١٠$$

أي : $$س^2 + ص^2 = ١٠٠$$

لنشتق الآن بالنسبة للزمن ن .

من قانون التسلسل نجد أن $٢س \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \frac{ءص}{ءن} = $ صفراً.

في اللحظة المطلوب فيها حساب المعدّل $\frac{ءص}{ءن}$ تكون ص = ٦ م وعليه س = ٨ م.

فنستخلص من المعادلة أعلاه أن :

$$٢ \times ٨ \times \frac{١}{٢} + ٢ \times ٦ \times \frac{ءص}{ءن} = \text{صفراً}$$

أي أن :

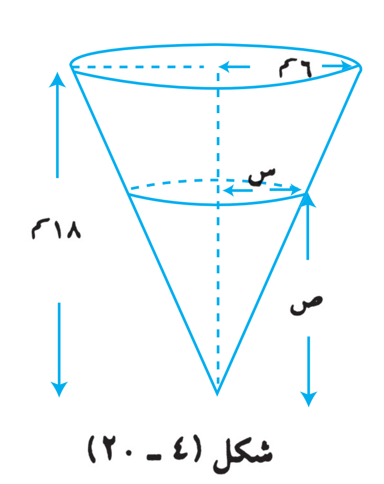
$$\frac{ءص}{ءن} = -\frac{٢}{٣}$$

وهذا يعني أن معدّل الانزلاق لأسفل هو $\frac{٢}{٣}$ م/ثانية

مثال (٤-٢٩)

ينسكب الماء بمعدّل ٢٠ سم^{٣}/ ثانية في إناء مخروطي الشكل رأسه لأسفل وطول قطر فتحته ١٢ سم وارتفاعه ١٨ سم . احسب معدّل ارتفاع الماء في الإناء عندما يكون ارتفاعه ١٢ سم .

الحل :



شكل (٤ ـ ٢٠)

افـرض أن س هو نصف قطر سطح الماء، وأن ص ارتفاعه عندما يكون الزمن ن. إذا كان ح هو حجم الماء في هذا الوقت، فإن المعدّل المعطى هو $\frac{ءح}{ءن} = ٢٠$ سم^{٣}/ ثانية، المعدل المطلوب هو $\frac{ءص}{ءن}$ عندما تكون ص = ١٢سم. الآن $ح = \frac{١}{٣} ط س^{٢} ص$

ولدينا ثـلاثة متغيّرات ح ، س ، ص . إمّا أن نصوغ س بدلالة ص بطريقة ما أو نبحث عن طريقةٍ لحساب $\frac{ءس}{ءن}$ إذا أردنا حساب $\frac{ءص}{ءن}$

بدراسة الشكل في ضوء تشابه المثلثات نجد أنّ :

$$\frac{س}{ص} = \frac{٦}{١٨}$$

أي : $س = \frac{١}{٣} ص$

وبهذا يكون $ح = \frac{١}{٣} ط \times \frac{١}{٩} ص^٢ \times ص = \frac{١}{٢٧} ط ص^٣$

إذن $\frac{ءح}{ءن} = \frac{١}{٢٧} ط . ٣ ص^٢ \frac{ءص}{ءن} = \frac{١}{٩} ط ص^٢ \frac{ءص}{ءن}$

وعندما تكون ص = ١٢ سم نجد أنّ

$$٢٠ = \frac{١}{٩} ط \times ١٤٤ \times \frac{ءص}{ءن}$$

أي $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٩ \times ٢٠}{ط \times ١٤٤} = \frac{٥}{٤ ط}$ سم/ ثانية .

مثال (٤-٣٠)

عند تسخين قضيب معدني على شكل اسطوانة دائرية قائمة يزيد الطول بمعدّل ٠,٠٠٥ سم/ ثانية ونصف القطر بمعدّل ٠,٠٠٢ سم/ ثانية

ما معدّل زيادة حجم القضيب عندما يكون الطول ٤٠ سم ونصف القطر ٣سم؟

الحـــل :

ليكن س هو نصف قطر القضيب وَ ص هو طوله عندما يكون الزمن ن .

المعدّلات المعطاة هي :

$\frac{ءص}{ءن}$ = ٠,٠٠٥ سم/ ثانية ، $\frac{ءس}{ءن}$ = ٠,٠٠٢ سم/ ثانية

ص
س

شكل (٤ ـ ٢١)

والمعدّل المطلوب هو $\frac{ءح}{ءن}$ حيث ح هو الحجم

الآن: ح = ط $س^2$ ص

ويكون لدينا ٣ متغيّرات نعلم معدّلي تغير اثنين منها. لذا نشتق مباشرة بالنسبة للزمن ن آخذين في الاعتبار أن كلا من س وَ ص يعتمد على ن ؛ باستخدام قانوني التسلسل ومشتقة حاصل الضرب نحصل على :

$$\frac{ءح}{ءن} = ط[س^2 \times \frac{ءص}{ءن} + ٢س \times \frac{ءس}{ءن} \times ص]$$

وبالتعويض بـ س = ٣ و ص = ٤٠ = ٣، $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠,٠٠٢، $\frac{ءس}{ءن}$ = ٠,٠٠٥ نجد أن :

$$\frac{ءح}{ءن} = ط[٩ \times ٠,٠٠٥ + ٢٤٠ \times ٠,٠٠٢]$$

$$= ط[٠,٠٤٥ + ٠,٤٨]$$

$$= ٠,٥٢٥ \text{ ط سم}^3/\text{ثانية}$$

نستشف من الأمثلة السابقة الخطوات التالية لتناول مثل هذه المسائل :

(١) حدِّد الكميات المتغيّرة مع تبيانها على رسم إن أمكن ذلك.

(٢) أوجد، من واقع السؤال معادلة تربط المقدار صاحب المعدّل المجهول مع المقادير ذات المعدّلات المعطاة.

(٣) اشتق طرفي هذه المعادلة بالنسبة للزمن ثم حد لإيجاد المشتقة التي تمثِّل المعدّل المجهول.

(٤) احسب هذه المشتقة في الموقف المعطي في السؤال بالتعويض.

ومن المهم أن تلاحظ أننا لا نعوِّض بقيم معيّنة للمقادير الواردة إلاّ في آخر مرحلة.

تمارين (٤ - ٦)

(١) يمشي رجل طـولـه ١٧٠ سم بسرعـة ٥ ,١م ثانية في شارع أفقي به مصباح معلّق على عمـود ارتفـاعـه ١ ,٥م من سطح الأرض . احسب معدّل تغيّر طول ظل الرجل على أرض الشارع إذا كان الرجل يسير على خط مستقيم مبتعدًا عن المصباح .

(٢) تتمدد كرة من المعدن بفعل الحرارة . إذا كان معدّل تزايـد نصف قطرها هو ٢ ملم/ ثانية ، فاحسب معدّل تـزايد مساحة سطحها ومعـدّل تزايد حجمها عندمـا يكون نصف القطر ٧سم .

(٣) يجري ولـد بسرعـة ٢ م/ ثانية على مستقيم أفقي متجهًا نحو عمود ارتفاعه ٦م . احسب معدّل تغيّر المسافة بين قدمي الولد وقمّة العمود عندما يكون الولد على بعد ٨م من قاعدة العمود .

(٤) تحرّك رجل من نقطة بسرعـة ٤كلم/ ساعة في اتجاه الشرق وبعد ساعـة تحرّك رجلٌ آخر من النقطة نفسها متجّهًا نحو الشمال بسرعة ٦كلم/ سـاعة . أوجد سرعة التباعد بين الرجلين (أي معدّل تغيّر المسافة بينهما) بعد ساعة أخرى .

(٥) يتساقط الـرمل مكوّنـًا كومة على شكل مخروط دائري قـائم بمعدّل ٦ سم٣ / ثانيـة . إذا كان نصف قطر قـاعدة المخـروط يساوي ارتفـاعه دائمًا فـاحسب معدّل تغيّر ارتفـاع الرمل في اللحظة التي يكون فيها هذا الارتفاع ٧ سم .

(٦) تـرتفع بالـونة في الهواء بسرعة ١م/ ثانيـة . إذا كان هنـالك مراقب على بعـد ٣٠٠ متر من مسقط البالـونة العمودي على الأرض فـاحسب معدّل تغيّر المسـافة بين المراقب والبالـونة حين يكون ارتفاعها ٤٠٠ متر.

(٧) يقرِّر قانـون بويل للغازات أنه إذا كـان الحجم هو ح، والضغط هو ع فإن ع ح = ثابتًا.

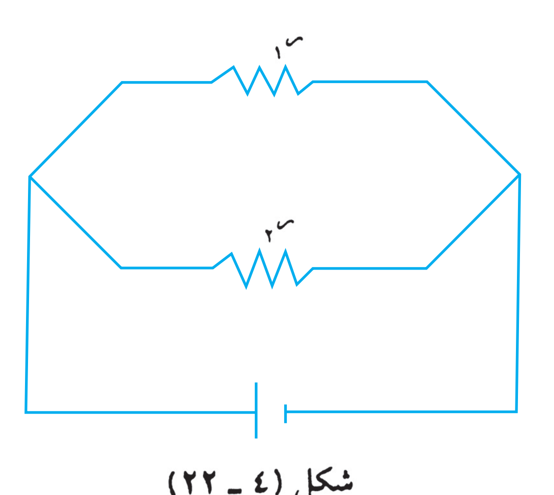
إذا كان في لحظة ما الحجم ٧٥ سم^{٣} والضغط ٢ نيوتن/ سم^{٢} ومعدل تناقص الضغط هو ٢ نيوتن/ سم^{٢}/ ثانية، فاحسب معدّل تغير الحجم في هذه اللحظة.

(٨) تذوب كرة ثلجية بحيث يتناقص قطرهـا بمعدّل ثابت. إذا نقص القطر في مدّة ٤٥ دقيقة من ١٢ سم إلى ٨ سم، احسب معدّل تغير حجم الكرة عندما يكون نصف القطر ٥ سم.

(٩) تزيد مساحـة مثلث متطابق الأضلاع بمعدّل ٤ سم^{٢}/ ثانية، ما معـدّل زيادة طول الضلع حينما تكون المساحة $١٠٠\sqrt{٣}$ سم^{٢}.

(١٠) الشكل (٤ ـ ٢٢) لدائرة كهربائية فيها مقاومتان $م_{١}$ ، $م_{٢}$ موصلتان على التوازي، إذا كانت $م_{١}$ تزيد بمعدّل ٠,١ أوم/ ثانية بينما تنقص $م_{٢}$ بمعدّل ٠,٠٥ أوم/ ثانية، فاحسب معدل تغيّر المقاومة الكلية م عندما تكون $م_{١}$ = ٣٠ أوم، $م_{٢}$ = ٦٠ أوم.

$\left(\frac{١}{م} = \frac{١}{م_{١}} + \frac{١}{م_{٢}}\right)$



شكل (٤ ـ ٢٢)

(١١) تتحرك نقطة على القطع الناقص $\frac{(س - ١)^{٢}}{٤} + \frac{ص^{٢}}{٣} = ١$ في اتجاه عقارب الساعة، إذا كانت سرعتها الرأسية عند $(٢ ، \frac{٣}{٢})$ هي ٣سم/ ثانية، فاحسب سرعتها عندئذ.

(١٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب $|أ ب| = ص$، $|ب جـ| = س$

و ن ($\hat{أ جـ ب}$) = هـ (راديان). إذا كان س، ص يتغيّران مع الزمن ن فأثبت أن: $\frac{د هـ}{د ن} = \frac{جتا^{٢} هـ}{س^{٢}} \left(س \frac{د ص}{د ن} - ص \frac{د س}{د ن}\right)$

إذا علمت أنه في لحظة مـا كانت س = ٣سم، ص = ٤ سم، س تتزايد بمعـدل ١ سم/ ثانية، وص تنقص بمعدّل ٢سم/ ثانية فاحسب معدّل تغير هـ.

٤ – ٨ مشتقات الدوال الدائرية

نظرية (٤ – ١١)

$\frac{ء}{ءس}$ (جا س) = جتاس لكل س ∈ ع

البرهان :

من المتطابقة المعروفة

جا ا – جا ب = ٢ جتا $\left(\frac{ا + ب}{٢}\right)$ جا $\left(\frac{ا – ب}{٢}\right)$

نستنتج أنَّ :

جا (س + هـ) – جا س = ٢ جتا (س + $\frac{هـ}{٢}$) جا $\frac{هـ}{٢}$

$\frac{ء}{ءس}$ (جا س) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\frac{\text{جا (س + هـ) – جاس}}{\text{هـ}}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\frac{\text{٢ جتا (س + } \frac{هـ}{٢}\text{) جا } \frac{هـ}{٢}}{\text{هـ}}$ = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ (جتا (س + $\frac{هـ}{٢}$) × $\frac{\text{جا } \frac{هـ}{٢}}{\frac{هـ}{٢}}$)

= $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ جتا (س + $\frac{هـ}{٢}$) × $\underset{\frac{هـ}{٢} \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\frac{\text{جا } \frac{هـ}{٢}}{\frac{هـ}{٢}}$

$\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ جتا (س + $\frac{هـ}{٢}$) = جتاس لأنَّ (جتا) دالة متصلة لكل س ∈ ع ؛

وَ $\underset{\frac{هـ}{٢} \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\frac{\text{جا } \frac{هـ}{٢}}{\frac{هـ}{٢}}$ = ١ حسب النظرية (٣ – ٧)

ملحوظة (٤ - ١٠)

تعتبر النظرية (٤ - ١١) النظرية الأساسية في دراستنا لمشتقات الدوال الدائرية، حيث إن مشتقات بقية الدوال الدائرية جميعها نتائج من هذه النظرية.

نتيجة (٤ - ٨) :

$$\frac{ء}{ءس}(\text{جتاس}) = -\text{جاس} \qquad \text{لكل س} \in ع$$

البرهان :

$$\text{جتا س} = \text{جا}\left(\frac{ط}{٢} - \text{س}\right)$$

$$= \text{جا ص حيث ص} = \frac{ط}{٢} - \text{س}$$

وباستخدام قاعدة التسلسل نحصل على :

$$\frac{ء}{ءس}(\text{جتا س}) = \frac{ء}{ءص}(\text{جا ص})\frac{ءص}{ءس}$$

$$= \text{جتا ص} \times (-١)$$

$$= -\text{جتا}\left(\frac{ط}{٢} - \text{س}\right)$$

$$= -\text{جا س}$$

نتيجة (٤ - ٩) :

$$\frac{ء}{ءس}(\text{ظا س}) = (\text{قا س})^{٢}$$

$$\text{لكل س} \neq \frac{١}{٢}ط + \text{ن} ط \qquad \text{حيث ن عدد صحيح}$$

البرهـان :

ظا س $=$ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، وباستخدام النظرية (٤ – ٨) فإن

$\frac{ء}{ءس}$(ظا س) $=$ $\frac{\text{جتاس (جتاس) – جاس (–جاس)}}{\text{(جتاس)}^{٢}}$

$=$ $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$=$ قا^{٢} س

حيث استفدنا من النظرية (٤ – ١١) والنتيجة (٤ – ٨)

نتيجة (٤ – ١٠) :

$\frac{ء}{ءس}$(ظتا س) $=$ – (قتا س)^{٢} ، س $\neq$ ن ط حيث ن $\in$ ص

$\frac{ء}{ءس}$ (قا س) $=$ (قا س) (ظا س) ، س $\neq$ $\frac{١}{٢}$ط + ن ط حيث ن $\in$ ص

$\frac{ء}{ءس}$ (قتا س) $=$ – (قتا س) (ظتا س) ، س $\neq$ ن ط ، حيث ن $\in$ ص

تدريب (٤–٧)

برهن صحة الفقرات الواردة في النتيجة (٤ – ١٠)

مثال (٤–٣١)

أوجد مشتقة كلّ من الدوال التالية ، ثم احسب كل مشتقة عند النقطة المعطاة :

أ) د (س) = س جتا^{٢} س ، س = $\frac{ط}{٣}$

ب) د (س) = ظا ($\sqrt{س+١}$) ، س = صفراً، $\sqrt{س+١} \neq \frac{ط}{٢}$ + ن ط

الحــل :

أ) دَ (س) = $\frac{ى}{ىس}$[س . (جتا س)^{٢}]

= (١) (جتا س)^{٢} + س [٢ جتاس $\frac{ى}{ىس}$(جتا س)]

= (جتاس)^{٢} + س [٢ جتا س (− جا س)]

= (جتا س)^{٢} − ٢س جتا س جا س

دَ ($\frac{ط}{٣}$) = ($\frac{١}{٢}$)^{٢} − ٢ $\frac{ط}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$) ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

= $\frac{١}{٢}$ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ط)

ب) د (س) = ص = ظا $\sqrt{س+١}$ ، نضع ع = $\sqrt{س+١}$

فتكون ص = ظا ع

وبتطبيق قاعدة التسلسل نحصل على

$\frac{ىص}{ىس}$ = $\frac{ىص}{ىع}$. $\frac{ىع}{ىس}$

ولكن $\frac{ءص}{ءع}$ = (قا ع)^{٢} من النتيجة (٤ – ٩)

كما أن $\frac{ءع}{ءس}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$ من النظرية (٤ – ١٠)

فتكون $\frac{ءص}{ءس}$ = (قا ع)^{٢} $\frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

= $\frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$ (قا $\sqrt{س+١}$)^{٢}

إذن دَ (٠) = $\frac{١}{٢}$ (قا ١)^{٢}

= $\frac{١}{٢(جتا ١)^{٢}}$ ≃ $\frac{١}{٢(٠,٩٩٩٨)}$ ≃ ٠,٥٠٠٢

تدريب (٤–٨)

أوجد مشتقات الدوال الآتية :

(١) ص = جا ٣س × جتا ٢س

(٢) ص = جا^{٤} ٥س

(٣) ص = جتا^{٣} ($\frac{ط}{٢}$ – ٢س)

(٤) ص = ظا^{٢} (٥ س – ٣)

٤ – ٩ المشـتقات العليـا

مما سبق نلاحظ أنَّ مشتقـة الدالـة ص = د (س) هي دالـة أخرى $\frac{ء ص}{ء س}$ = دَ (س)، وإذا كانت دَ (س) قابلـة للاشتقاق فإن مشتقتهـا تسمى المشتقة الثانيـة (أو مشتقة المشتقة) للـدالة ص= د(س) وتكتب على الصورة

$$\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} = \frac{ء}{ء س} \left(\frac{ء ص}{ء س} \right) = \ddot{د}(س)$$

والمشتقة الثالثة هي :

$$\frac{ء^{٣}ص}{ء س^{٣}} = \frac{ء}{ء س} \left(\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} \right) = \dddot{د}(س)$$

كما نرمز للمشتقة النونية بالشكل :

$$\frac{ء^{ن}ص}{ء س^{ن}} = د^{(ن)}(س) \text{ حيث ن عدد طبيعي}$$

ملحـوظـة (٤– ١٠)

لاحظ أنَّ $د^{(ن)}$ تدل على المشتقة النونية للدالة د بينما $د^{ن}$ هي القوة النونية لهذه الدالة .

مثال (٤–٣٢)

أوجد المشتقة الثانية للدالة ص = جا س

الحـل :

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء}{ء س} (جا س)$$

$$= جتا س$$

$$\frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{د}{د س}(جتا س)$$

$$= -جا س$$

مثال (٤-٣٣)

احسب قيمة المشتقة الثالثة للدالة ص = س^{٤} + س^{٣} − س عند النقطة س = ٢

الحـــل :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س}(س^{٤} + س^{٣} - س)$$

$$= ٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١$$

$$\frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{د}{د س}(٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١)$$

$$= ١٢ س^{٢} + ٦ س$$

$$\frac{د^3 ص}{د س^3} = \frac{د}{د س}(١٢ س^{٢} + ٦ س)$$

$$= ٢٤ س + ٦$$

وعندما س = ٢ فإن

$$\frac{د^3 ص}{د س^3} = ٢٤(٢) + ٦$$

$$= ٥٤$$

مثال (٤-٣٤)

أوجد المشتقة الثالثة للدالة ص = جتا ٢س عند س = $\frac{ط}{٤}$

الحــل :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{د}{دس}(\text{جتا } ٢س)$$

$$= \frac{د}{د ع}(\text{جتا } ع)\ \frac{د ع}{د س}$$ حيث ع = ٢س

$$= -\text{جا } ع .\ (٢)$$

$$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{د}{دس}(-\ ٢\ \text{جا} ع)$$

$$= -٢\frac{د}{د ع}(\text{جا } ع) .\ \frac{د ع}{د س}$$

$$= -٢\ \text{جتا } ع .\ (٢)$$

$$\frac{د^٣ص}{دس^٣} = \frac{د}{دس}(-٤\ \text{جتا } ع)$$

$$= -٤\ \frac{د}{د ع}(\text{جتا } ع) .\ \frac{د ع}{د س}$$

$$= -٤\ (-\ \text{جا } ع) .\ (٢)$$

$$= ٨\ \text{جا } ٢س$$

وعندما س = $\frac{ط}{٤}$ فإن

$$\frac{د^٣ص}{دس^٣} = ٨\ \text{جا}\left(\frac{ط}{٢}\right)$$

$$= ٨$$

مثال (٤-٣٥)

إذا كانت ص = س جا س فأثبت أن

$$س \frac{ء^3ص}{ءس^3} + س \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص = صفراً$$

الحـــل :

$$\frac{ءص}{ءس} = س \text{ جتا } س + \text{جا } س$$

$$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = \text{جتا } س - س \text{ جا } س + \text{جتا } س$$

$$= ٢ \text{ جتا } س - س \text{ جا } س$$

$$= ٢ \text{ جتا } س - ص$$

$$\frac{ء^3ص}{ءس^3} = -٢ \text{ جا } س - \frac{ءص}{ءس}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{ء^3ص}{ءس^3} + \frac{ءص}{ءس} + ٢ \text{ جا } س = صفراً$$

$$\Leftarrow \quad س \frac{ء^3ص}{ءس^3} + س \frac{ءص}{ءس} + ٢ص = صفراً$$ بالضرب في س

تدريب (٤-٩)

أكمل الجدول الآتي تلخيصا لمشتقات الدوال الدائرية :

الدالة	المشتق
جا س	$س \in ع$
جتا س	$س \in$

الدالة	الشرط
ظا س	س ≠ ($\frac{١}{٢}$ + ن) ط ، ن ∈ ص
ظتا س	س ≠
قا س	س ≠
قتا س	س ≠
جا د (س)	
جتا د (س)	
ظا د(س)	د (س) ≠
ظتا د(س)	د(س) ≠
قا د(س)	د(س) ≠
قتا د (س)	د (س) ≠

تمارين (٤ - ٧)

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

(١) $د(س) = جا ٣س$

(٢) $د(س) = جتا ٥س$

(٣) $د(س) = جا \sqrt{س+١}$ ، $س \geq -١$

(٤) $د(س) = جتا \sqrt{س^٢+٤}$

(٥) $د(س) = قا (س^٢ + ٥)$

(٦) $د(س) = قا (٢س - ٥) ط$

(٧) $د(س) = ظتا (٣س + ٢)$

(٨) $د(س) = قتا \sqrt{س^٢+١}$

أوجد قيمة مشتقة كل من الدوال التالية في التمارين من (٩) إلى (١٥) عند القيمة المعطاة للمتغير س .

(٩) $د(س) = س جتا ٢ س$ عند $س = \frac{ط}{٤}$

(١٠) $د(س) = س^٢ قا ٣س$ عند $س = \frac{ط}{٢}$

(١١) $د(س) = ٥ س ظا س$ عند $س = \frac{ط}{٣}$

(١٢) $د(س) = ٢ س قا س$ عند $س = \frac{ط}{٣}$

(١٣) د (س) = ٢س^{٢} جا $\sqrt{س}$ عند س = ٥ط

(١٤) د (س) = جا^{٢}س عند س = $\frac{ط}{٤}$

(١٥) د (س) = س جا ٢س + جتا س عند س = $\frac{ط}{٦}$

(١٦) إذا كانت ص = حا س - $\frac{١}{٣}$ حا^{٣} س فأثبت أن

$$\frac{ءص}{ءس} = جتا^{٣} س$$

(١٧) إذا كانت ص = (س^{٣} + س^{٢}) قتا س فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(١٨) إذا كانت ص = ظتا $\sqrt{س^{٢} + ٢}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(١٩) إذا كانت ص = $\frac{جاس + جتاس}{جاس - جتاس}$ فأثبت أن :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢}{١ - جا٢س}$$

(٢٠) إذا كانت ص = $\frac{جتاس}{جاس + جتاس}$ فأثبت أنَّ :

$$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٢\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} جتا٢س$$

(٢١) إذا كانت د (س) = جتا ٢ س فأوجد المشتقة الثالثة للدالة د .

(٢٢) إذا كانت د (س) = جا٣س فأثبت أنَّ :

$$د^{(٤)} (س) = ٨١ د (س)$$

(٢٣) إذا كانت ص = س ظا$\sqrt{س^{٢} + ١}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(٢٤) إذا كانت ص = ظتا س + $\frac{١}{٣}$ ظتا^{٢} س فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(٢٥) إذا كانت ص = س^{٢} جا ٢س فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(٢٦) إذا كانت ص = قتا س فأوجد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

(٢٧) إذا كانت ص = س ظا س فأثبت أنَّ :

$$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٢ \text{ (١ + ص) قا}^{٢}\text{س}$$

٤ - ١٠ التفاضل

نهدف في هذا البند إلى التعرّف على مفهوم جديد له صلة وثيقة بالمشتقة ويستفاد منه في نواحٍ متعدّدة.

فإذا كانت ص = د (س) دالة معرَّفة على الفترة ف = (ا ، د)، وكانت س ∈ ف ، فإننا ندعو الفرق د (س + هـ) − د (س) تغيّر الدالة د ونرمز له بالرمز Δ ص ، كما تعلم.

تعريف (٤ – ٣)

ندعو حاصل الضرب دَ (س) × هـ تفاضل الدالة د عند س ونرمز له بالرمز ءص فيكون :

ء ص = دَ (س) × هـ (٤ – ١٩)

سوف نبيّن فيما يأتي أنّه إذا كانت هـ صغيرة فإن تغير الدالة يساوي تقريبًا تفاضلها ، أي أنَّ :

Δ ص ≃ ءص

ذلك لأنَّ : $\lim\limits_{هـ \leftarrow .} \dfrac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = دَ(س)$

وهذا يعني أنَّ : $\dfrac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = دَ(س) + ك$: ك ← . عندما هـ ← .

⇐ د (س + هـ) − د (س) = دَ (س). هـ + ك. هـ

⇐ د (س + هـ) − د (س) ≃ دَ (س). هـ

لأن الحد ك.هـ صغير جداً :

⇐ Δ ص ≃ ءص

أي أنَّ تفاضل دالة يعتبر قيمة تقريبية جيدة لتغير تلك الدالة عند نقطة من مجالها .

وفيما يأتي نعطي تفسيراً هندسياً للتفاضل في الشكل (٤-٢٣) المنحنى (ى) يمثّل الدالة ص=د(س) خلال الفترة

ف = [ا ، ب]، $س_١$ ∈ (ا ، ب)

ن ($س_١$ ، د ($س_١$))

و ($س_١$ + هـ، د ($س_١$ + هـ))

ءس = سَ × هـ من (٤-١٩)

= ١ × هـ = هـ = $\overline{\text{ن ر}}$

$\overline{\text{رو}}$ = د ($س_١$ + هـ) − د ($س_١$) = Δ ص

شكل (٤-٢٣)

ولعلّك تلاحظ أن ميل المماس في ن = $\frac{|\text{رحـ}|}{|\text{ن ر}|} = \frac{|\text{رحـ}|}{\text{هـ}}$

كما أن ميل المماس في ن = دَ ($س_١$) (لماذا ؟)

⇐ $\frac{|\text{رحـ}|}{\text{هـ}}$ = دَ ($س_١$)

⇐ |رحـ| = دَ ($س_١$) × هـ = ءص عند النقطة ن

⇐ |رحـ| = ءص

والفرق بين Δ ص، ءص : Δ ص − ءص = $\overline{\text{رو}}$ − $\overline{\text{رحـ}}$ = $\overline{\text{حـو}}$

وهو الجزء الذي ينتهي إلى الصفر عندما هـ← . ، وهو يمثل مقدار الخطأ المرتكب عندما نستبدل بـ Δ ص التفاضل ءص .

مثال (٤-٣٦)

قيس طول ضلع مكعب من المعدن فوجد أنه ٢٢ سم، فإذا كان الخطأ في هذا القياس لا يتجاوز ٠,٠٢ سم، فاحسب القيمة التقريبية للخطأ في حجم المكعب.

الحل:

إنّ س = ٢٢ سم ، هـ = ٠,٠٢ سم

حجم المكعب = ع (س) = $س^٣$، عَ (س) = $٣س^٢$

الخطأ في حجم المكعب = $(٢٢,٠٢)^٣ - (٢٢)^٣$ = ٢٩,٠٦٦ $سم^٣$

القيمة التقريبية للخطأ = عَ (٢٢) (٠,٠٢)

= ٣ $(٢٢)^٢$ (٠,٠٢) = ٢٩,٠٤ $سم^٣$

مثال (٤-٣٧)

أوجد قيمة تقريبية لتغير الدالة د (س) = $س^{\frac{٢}{٥}}$ عندما تزداد من ٣٢ إلى ٣٤ واستنتج قيمة تقريبية للعدد $(٣٤)^{\frac{٢}{٥}}$

الحل:

دَ (س) = $\frac{٢}{٥}$ $س^{-\frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٢}{٥} \times \frac{١}{س^{\frac{٣}{٥}}}$ ، فتكون القيمة التقريبية لتغيّر د هو ءص = دَ (٣٢) × ٢

= $\frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٣٢^{\frac{٣}{٥}}} \times ٢ = \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٨} \times ٢$ = ٠,١ .

إذن : $(٣٤)^{\frac{٢}{٥}} - (٣٢)^{\frac{٢}{٥}} \simeq$ ٠,١ .

$\Leftarrow$ $(٣٤)^{\frac{٢}{٥}} \simeq ٣٢^{\frac{٢}{٥}}$ + ٠,١ = ٤,١

تدريب (٤-١٠)

(١) احسب قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[٣]{٢٦}$

(٢) احسب قيمة تقريبية لجيب الزاوية التي قياسها ٤٦°.

تمارين عامة

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد دَ (س) عند النقطة المعطاة في كل من التمرينين (١)، (٢).

(١) د (س) = $\frac{س+١}{س-٢}$ عند س = ١

(٢) د (س) = $\sqrt[3]{٢س}$ عند س = $\frac{١}{٢}$

في التمارين من (٣) إلى (٦) أو جد دَ (س)

(٣) د (س) = $س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٢س + ١$

(٤) د (س) = $٢ س^{٣} \sqrt{س} + ٣س^{٢} - ٥ س^{\frac{-١}{٢}}$

(٥) د (س) = $س^{٢}$ جا س

(٦) د (س) = $\frac{١+ جاس}{جتاس}$

(٧) إذا كانت ع = $\frac{ص+ ٢}{ص - ١}$ ، ص = $\frac{س+ ٤}{س - ٢}$

(أ) عبر عن ع بدلالة س ثم أوجد $\frac{ءع}{ءس}$

(ب) أوجد $\frac{ءع}{ءس}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

(٨) أوجد الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى الدالة

د (س) = $س^{٢} - ٢$ عند النقطة ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٧}{٤}$) مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

(٩) إذا كان المنحنى ص = $ا س^{٣} + ب س^{٢}$ يمس المستقيم

ص = ١٣س - ٧ عند النقطة (١ ، ٦) فأوجد قيمتي أ، ب.

(١٠) إذا كـان قيـاس الـزاويـة بين المماس للمنحنى ص = أ $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$ − ٢س + ١ والاتجاه الموجب لمحـور السينـات عند النقطـة (١ ، − ٣) الـواقعة على المنحنى هـو $\frac{٣ط}{٤}$ فأوجـد قيمتي أ ، ب .

(١١) أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي عند النقطة(−١ ، ٢) للمنحنى ٤ ص = ٩ − $س^{٢}$.

(١٢) إذا كـانت ص = $\frac{(س+١)^{٢}}{٢ - س}$ أوجـد النقط على المنحنى التـي عنـدهـا المماس للمنحنى يكون عموديا على المستقيم ص = $\frac{١}{٥}$ (١ − ٤ س) .

(١٣) إذا كانت س ص = ١ فأثبت أن $س^{٢}$ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٣ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٠ .

(١٤) احسب القيمة التقريبية للعدد :

$(٨,٠١)^{\frac{٤}{٣}} + (٨)^{-\frac{١}{٣}}$

إرشاد : افرض أن ص = $س^{\frac{٤}{٣}}$ + $س^{-\frac{١}{٣}}$

(١٥) إذا كانت ص = $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ − ٥$س^{٢}$ + $\sqrt{س}$ + ٢

فأوجد ءص، ثم أوجد قيمة ءص من أجل س = ٤، ءس = ١ , ٠

(١٦) احسب القيمة التقـريبيـة لمسـاحة حلقـة دائريـة نصف قطـرهـا الـداخلي ٨ , ١٩سم والخارجي ٢٠سم مستخـدمًا مفهـوم التفاضل .

ع : (٩٢ , ٧ط)

إجابات بعض تمارين الكتاب

الباب الأول :

التمارين (١ – ١)

(١) $(\text{ص} - ٣)^{٢} = -٨\,(\text{س} + ٢)$

(٩) $(\text{س} + ٣)^{٢} = (\text{ص} - ٢)$

(١٣) $(\text{ص} - ٤)^{٢} = ٦\,(\text{س} - \frac{١}{٢})$

(١٦) $(\text{س} - ١)^{٢} = -\,(\text{ص} - ٢)$

التمارين (١ – ٢)

(٦) $\frac{\text{س}^{٢}}{٢١} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} = ١$

(٨) $\frac{(\text{س}+١)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص}-٥)^{٢}}{١٦} = ١$

التمارين العامة

(٨) $\frac{(\text{س}-٢)^{٢}}{١٦} - \frac{(\text{ص}+٤)^{٢}}{٩} = ١$

(١٢) $\frac{(\text{ص}-٦)^{٢}}{\frac{٩}{٤}} - \frac{(\text{س}-٢)^{٢}}{\frac{١٣٥}{٤}} = ١$

التمارين العامة

(٣) $\frac{(\text{س}-١)^{٢}}{٩} + \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{٤} = ١$

(٥) $\frac{(س + ٢)^٢}{٣} - \frac{(ص + ١)^٢}{٣} = ١$

(١٠) $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٣٦} = ١$

الباب الثاني :

التمـارين (٢ – ٢):

(٢) ١٤   (٤) – ٤٠   (٥) ٤

(٦) ١٤٥٨   (٧) $-٢٧ \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن-١}$ (٨) ٦٢٤

(٩) الساعة ١٤   (١٠) ١٩٢٠٠٠٠

التمـارين (٢ – ٣):

(١) ٢٤   (٢) ٥   (٣) ٦٥٠

(٤) $\frac{٢٥٥}{٢٥٦}$ (٥) ١٠٢٣   (٦) $\frac{١٠٩٣}{٣}$

(٧) ٢٥٤٦   (٨) $\frac{١٠٩٣}{٢٧}$ (٩) ١٠

(١٠) ٤   (١١) ٩٣   (١٢) ١٢   (١٣) ٩٥٥٠٠٠٠٠

تمارين (٢ – ٤)

(٤) $-\frac{٣}{٤}$ (٥) صفر (٦) ∞

(٧) $-\frac{١}{٢}$ (٨) $\frac{٢}{٩}$ (٩) – ∞

(١٠) صفر (١١) صفر

تمارين (٢ – ٥)

(١) $\frac{٣}{٢}ن^{٢} - \frac{٧}{٢}ن$ (٣) ٢ $(٢^{ن} - ١)$ (٥) $\frac{١}{٢}$

(٦) $-\frac{١}{٦}$ (٩) ٣

التمـــارين العـــامة

(٥) ٤ (٦) ٢٥٢٠ (٧) ٦٨٧٦٠

(٨) صفر (٩) ١ (١٢) ٦

الباب الثالث

تمارين (٣ – ٣)

(١) ٣ (٢) ٣ (٤) صفر

تمارين (٣ – ٤)

(١) ٩ (٢) ١٥ (٣) صفر

(٤) $\frac{١}{٣}$ (٥) $-\frac{٤}{٥}$ (٦) صفر

(٧) $\frac{١}{٥}$ (٩) ٥ (١١) صفر (١٢) صفر

تمارين (٣ – ٥)

(١) ٨ (٢) ١٢ (٣) $\frac{٣}{٤}$

(٤) $\frac{٤}{٣}$ (٥) $-\frac{١}{٦}$ (٦) $\frac{١}{٨}$

(٧) – ٤ (٨) $\frac{١}{١٢}$ (٩) ٤

(١١) $-\frac{٣}{٥}$ (١٢) ٥، – ٥ (١٣) ليس للدالة نهاية

(١٤) $\frac{٢}{٥}$ (١٧) –١ (١٨) $\frac{٣}{٢}$ (١٩) ١

تمارين (٣ – ٦)

(١) صفر (٢) صفر (٣) صفر

(٨) ٣ (١٠) $\frac{٢}{٣}$ (١١) ١

(١٢) ٦ (١٣) ٢ (١٤) $\frac{١}{٣}$

(١٥) $\frac{٣}{٥}$ (١٦) $\frac{١٥}{٢}$ (١٧) – ٢

(١٨) ٦ (١٩) ١ (٢٠) ٣

(٢١) $-\frac{٣}{٢}$ (٢٢) صفر (٢٣) صفر

التمــارين العــامة

(٢) $\frac{١}{ء}$ (٣) ٢ (٥) ٣

(٦) ١ (٨) صفر (٩) $\frac{٥}{٢}$

(١٠) ٨ (١١) صفر

الباب الرابع

تمـارين (٤ – ١)

(١) ٢ (٢) – ٥ (٣) ٨,٢

(٤) ٦,١ (٥) $\frac{١}{٣}$ (٦) ٤

(٧) $\frac{١}{٤}$ (٨) ٣ (٩) ٥

(١٠) ٩ (١١) ٠,١٦ (١٢) ٠,٢٩

(١٣) ١، –١، ٠ (١٤) ٣، ٥,٨، ١,٢، ٢

(١٥) ٥ (١٦) ٤٨,٨ ط (١٧) ٤٩ ط

تمارين (٤ – ٢)

(١) ٢ (٢) ١٢ (٣) ٢

(٤) ١ (٩) $٣\sqrt{٣}$ (١٠) ١٩٦ ط

تمارين (٤ – ٣)

(٢) $٢٤ س^{٢}$ (٤) $٢ن س^{٢ن - ١}$ (٦) $٣ س^{٢} + ٦$

(٨) $\frac{-١}{(س - ٢)^{٢}}$ (١٠) $\frac{٩}{(س + ٥)^{٢}}$ (١٢) $- \frac{٢ (ن^{٢} + ١)}{(ن^{٢} - ١)^{٢}}$

(١٤) $\frac{١}{٤}$ (١٦) $٤س^{٣} - ٩س^{٢} + ٤س + ٩$

(١٨) $٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ١٤س - ٨$

(٢٠) $٢(س^{٢} - س - ١)(٢س - ١)$ (٢٢) $٤(س+١)^{٣}$

(٢٦) $\frac{-٢(س^{٢} + ٩س + ٩)}{(س - ٩)^{٢}}$ ، (٢٨) $دَ(س) = \frac{٨(٢س + ١)}{(س^{٢} + س + ٤)^{٢}}$

(٣٠) $٣ س^{٢} + ٦س - ٩$ (٣٢) $- \frac{١}{٤}$

(٣٤) ١، ٣ (٣٦) (-٢، ٠)

تمارين (٤ – ٤)

(١) $ص = -\frac{١}{٢}س + \frac{٩}{٤}$ (٣) $ص = س - ٢$

(٥) ص = ١، س = −١ (٧) $(\frac{١}{٢}، \frac{٥}{٢})$، $(-\frac{١}{٢}، -\frac{٥}{٢})$

(٩) ٤ (١١) ٥، −٤ (١٣) −١، $\frac{١}{٢}$

(١٥) $\frac{٥}{٩}$ ، $-\frac{٢٥}{٥٤}$ (٢١) −١، ١

تمارين (٤ – ٥)

(١) $٦ س^٥ - ٤ س$ (٣) $\frac{٣}{٢}\sqrt{س} + ٣ + \frac{٣}{٢}\sqrt{س^{-١}}$

(٥) $٤ س^٣ + ١٢س - \frac{١٢}{س^٣} - \frac{٤}{س^٥}$

(٧) $٩ (س^٣ + س^٢ - ٢)^٨ (٣س^٢ + ٢س)$

(٩) $٦ \left(\frac{١}{س^٢ + ٤}\right)^٥ \left[-\frac{٢ س}{(س^٢ + ٤)^٢}\right]$

(١١) $\frac{١٦س}{٣ (س^٢ + ٤)^٢} \left(\frac{س^٢ + ٤}{س^٢ - ٤}\right)^{\frac{٢}{٣}}$

(١٣) $٤ (س^٣ + ٣ س^٢ + ٦ س)^٣ (٣س^٢ + ٦ س + ٦)$

تمارين (٤ – ٦)

(١) ٠.٧٥ م/ث ، (٢) ١٢٣٢٠٠ ملم^٣/ث ، (٣) −١.٦ م/ث ، (٤) ٦.٨ كلم/ ساعة.

(٥) $\frac{٣}{٧٧}$ سم/ث ، (٦) ٠.٨ م/ث ، (٧) ٧٥ سم^٣/ث ، (٨) $\frac{٨٠ط}{٩}$ سم^٣/د ،

(٩) $\frac{٢}{٥\sqrt{٣}}$ سم/ث ، (١٠) $\frac{٠.٣٥}{٩}$ أوم/ث .

(٢) $-$ ٥ جا ٥س

(٤) $-\frac{س}{\sqrt{س^٢+٤}}$ جا $\sqrt{س^٢+٤}$

(٦) ٢ط [قا (٢س $-$ ٥) ط] [ظا (٢س $-$ ٥) ط]

(٨) $-\frac{س}{\sqrt{س^٢+١}}$ قتا $\sqrt{س^٢+١}$ ظتا $\sqrt{س^٢+١}$

(١٠) غير معرفة

(١٢) ٤ + $\frac{٤}{٣}\sqrt{٣}$ ط

(١٤) ١

(١٦) جتا^{٣}س

(١٨) $-\frac{س}{\sqrt{س^٢+٢}}$ قتا $\sqrt{س^٢+٢}$

التمـــارين العـــامة

(٢) $\frac{٢}{٣}$

(٤) ٧س$^{\frac{٥}{٢}}$ + ٦س + $\frac{٥}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$

(٦) $\frac{١ + جاس}{جتا^٢ س}$

(٨) ٤٥

(١٠) ٥، $-$٧

(١٢) (٠، $\frac{١}{٢}$)، (٤، $-\frac{٢٥}{٢}$)

(١٤) ١٦,٥٢٦٤٦

(١٥) $-$ ٢,٣٧٥


شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية